



**Eurico Lourenço  
Correia**

**Plataforma de apoio à análise de estruturas 2D**





**Eurico Lourenço  
Correia**

## **Plataforma de apoio à análise de estruturas 2D**

dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil realizada sob a orientação científica do Doutor Nuno Filipe Ferreira Soares Borges Lopes, Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Aveiro e coorientação do Doutor Humberto Salazar Amorim Varum, Professor Catedrático do Departamento de Engenharia Civil da Universidade do Porto e do Doutor Vitor Emanuel Marta da Silva, Coordenador da Secção de Risco Sísmico da GEM Foundation, Pavia, Itália.





Dedico este trabalho à minha família pelo incansável apoio e por me permitirem chegar onde cheguei.



## **o júri**

presidente

**Prof. Doutora Ana Luísa Pinheiro Velosa**

professora associada do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Aveiro

**Doutor Mário António Lage Alves Marques**

investigador pós-doutoramento na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

**Prof. Doutor Nuno Filipe Ferreira Soares Borges Lopes**

professor auxiliar do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Aveiro



## **agradecimentos**

A todas as pessoas intervenientes no decorrer do meu percurso académico, pois sem elas esta meta teria o dobro ou o triplo da dificuldade, agradeço todos os momentos passados, conhecimentos partilhados, ajuda prestada e carinho demonstrado.

Aos meus pais, irmão, cunhada e sobrinho que sempre estiveram presentes tanto nos momentos positivos, como negativos e que sem eles isto não seria possível.

Aos orientadores/co-orientadores Prof. Humberto Varum, Prof. Nuno Lopes e Doutor Vitor Silva pelo incansável apoio, disponibilidade e conselhos sempre úteis na resolução desta dissertação.

Um especial agradecimento ao Vitor Silva pela grande amizade, pela presença incansável, pelos grandes momentos partilhados e por toda a sabedoria e ajuda fornecida.

To Samson Mano for the knowledge, help and material provided for the software development.

Ao André Guimarães, António Diogo, José Silva, Samuel Carvalho, Tiago Carvalho, Edgar Pinto, Guilherme Ascensão, Telmo Cruz, Gilberto Selores, Celso Alves, Pedro Chaves, Hélder Sá, Francisco Roldão, João Freitas, Ana Ministro, Bernardo Limas, entre muitas outras que infelizmente não terei espaço para descrever aqui, pois uma página não chegaria para evidenciar todas as pessoas que me são próximas e que têm importância para mim, mas sabem que estão incluídas nesta enumeração, agradeço por todos os momentos partilhados, toda a ajuda fornecida ao longo deste percurso, pois sem ela seria uma tarefa bastante mais árdua, e pela amizade ao longo destes anos.

Ao João Ferreira, André Monteiro e Élio Maia pelo incansável apoio e ajuda no que diz respeito à programação.

À Marina Jordão por todos os momentos partilhados, palavras de apoio, incentivo e motivação, assim como pela companhia tanto nos bons como nos maus momentos.



## palavras-chave

Análise de estruturas bidimensionais, diagramas, método da rigidez direta, *software*, programação orientada a objetos, VB.NET.

## resumo

Nos dias de hoje é cada vez mais importante e necessário o recurso a ferramentas de cálculo e análise para auxílio pedagógico, de forma a garantir uma melhor aprendizagem e sensibilidade, por parte dos estudantes.

Constituiu-se como objetivo da presente dissertação, o desenvolvimento de uma ferramenta informática denominada STAY2D que visa a análise de estruturas 2D.

Objetivou-se a concepção de um *software* com um visual apelativo, intuitivo e amigável, de forma a que os seus utilizadores, maioritariamente estudantes do curso de Engenharia Civil, obtenham conhecimento, sensibilidade e contato na área da análise de estruturas.

A linguagem de programação adotada no desenvolvimento da aplicação informática foi a linguagem orientada a objetos *Visual Basic .NET*, fornecendo um forte contributo na versatilidade do produto final.

O STAY2D possibilita o cálculo de estruturas isostáticas e hiperestáticas, bem como o uso de vários tipos de solicitações, configurações geométricas e características materiais, obtendo-se como resultados as respetivas reações de apoio, diagramas de esforço axial, transversal e fletor, e a sua configuração deformada.

São apresentados os conceitos teóricos, que fundamentam os cálculos executados pelo programa, e o modo como estes são implementados. Adicionalmente, efetuou-se uma comparação de três casos práticos entre alguns *softwares*, com o intuito de avaliar a fiabilidade do STAY2D.





**keywords**

Analysis of two-dimensional structures, diagrams, Direct Stiffness Method, software, Object Oriented Programming, VB.NET.

**abstract**

Nowadays the use of calculation and analysis tools as teaching aids is increasingly important and necessary to ensure better learning and sensitivity of students.

The objective of this thesis is the development of a software tool called STAY2D, which allows us to analyse 2D structures.

Its aim is to design a software with an appealing visual, intuitive and user friendly so that their users, mostly students of the Civil Engineering degree, gain knowledge, become sensible and have contact with structures.

The programming language adopted in the development of this computer application is the one we use for oriented objects Visual Basic .NET and it provides a strong contribution to the versatility of the final product.

The STAY2D allows the calculation of hyperstatic structures, as well as the use of various types of requests, geometrical configurations and material characteristics, obtaining as a result the respective support reactions, axial force diagrams, shear and bending, and their deformed configuration.

The theoretical concepts that justify the calculations used by the program and how these are implemented are described. In addition, it performs a comparison of three case studies of software in order to assess the reliability of STAY2D.



## ÍNDICES

---



## Índice geral

Índice geral.....	xvii
Índice de figuras .....	xix
Índice de tabelas .....	xx
Abreviaturas e acrónimos.....	xxi
Lista de símbolos .....	xxiii
<b>1. Introdução.....</b>	<b>3</b>
1.1 Enquadramento e motivação.....	3
1.2 Objetivos.....	4
1.3 Estrutura da dissertação .....	4
<b>2. Enquadramento teórico .....</b>	<b>7</b>
2.1 Estruturas .....	7
2.1.1 Tipos de estruturas.....	7
2.1.2 Esforços .....	7
2.1.3 Condições de apoio.....	8
2.1.4 Estatia .....	9
2.2 Análise estrutural .....	10
2.2.1 Tipos de análise .....	10
2.2.2 Formulação baseada na rigidez.....	12
<b>3. Método da Rigidez Direta (<i>Direct Stiffness Method</i>).....</b>	<b>17</b>
3.1 Viga contínua.....	17
3.1.1 Matriz de rigidez da viga.....	19
3.1.2 Matriz de rigidez global da viga.....	21
3.1.3 Vetor de cargas .....	23
3.1.4 Solução para as equações de equilíbrio .....	25
3.2 Pórtico plano .....	28
3.2.1 Matriz de rigidez de um elemento no sistema de eixos locais.....	28
3.2.2 Transformação do sistema de eixos locais para os globais .....	30

3.2.3	Matriz de rigidez do elemento nos eixos globais .....	32
3.2.4	Matriz de rigidez global da estrutura.....	33
<b>4.</b>	<b>Linguagem de programação .....</b>	<b>37</b>
4.1	Considerações gerais .....	37
4.2	Programação orientada a objetos .....	37
4.2.1	Abstração.....	38
4.2.2	Classe .....	39
4.2.3	Encapsulamento .....	39
4.2.4	Herança.....	40
4.2.5	Polimorfismo .....	40
4.3	Características da linguagem .....	40
<b>5.</b>	<b>Programa STAY2D.....</b>	<b>45</b>
5.1	Organização do algoritmo .....	45
5.2	Apresentação do programa .....	46
5.3	Funcionalidades .....	51
5.3.1	Criar a estrutura .....	51
5.3.2	Modificar propriedades dos elementos .....	52
5.3.3	Definir condições de apoio.....	53
5.3.4	Inserir cargas na estrutura .....	54
5.3.5	Executar análise.....	54
5.4	Resultados do programa .....	56
<b>6.</b>	<b>Exemplos práticos e comparações de resultados.....</b>	<b>63</b>
6.1	Viga simplesmente apoiada .....	65
6.2	Pórtico plano .....	67
6.3	Pórtico plano com um elemento inclinado .....	73
6.4	Análise de resultados .....	77
<b>7.</b>	<b>Considerações finais e desenvolvimentos futuros .....</b>	<b>81</b>
7.1	Conclusões.....	81
7.2	Desenvolvimentos futuros .....	81
	<b>Referências bibliográficas .....</b>	<b>85</b>

---

## Índice de figuras

Figura 1 - Classificação dos esforços/forças.....	8
Figura 2 - Tipos de estadia (Romão, 2002).....	9
Figura 3 - Análise linear (Vila-Real, 1997).....	11
Figura 4 - Configuração deformada de um pórtico plano, através da sobreposição das diferentes configurações deformadas (Martha, 2010).....	13
Figura 5 - Viga contínua.....	18
Figura 6 - Tramo da viga contínua.....	19
Figura 7 - Cálculo da matriz de rigidez da viga.....	20
Figura 8 - Viga contínua.....	21
Figura 9 - Representação das restrições, numeração de membros e nós e possíveis graus de liberdade.....	22
Figura 10 - Matriz de rigidez dos elementos.....	22
Figura 11 - Matriz de rigidez global da viga contínua.....	23
Figura 12 - Exemplo de quantificação das cargas nodais equivalente.....	24
Figura 13 – Somatório das reações presentes em b), c) e d) para obtenção das reações de apoio demonstradas em a).....	26
Figura 14 - Elemento no sistema de eixos locais.....	29
Figura 15 - Representação do elemento e os seus respetivos deslocamentos nos diferentes sistemas de eixos.....	30
Figura 16 - Representação do elemento e as suas respetivas forças nos diferentes sistemas de eixos.....	32
Figura 17 - Janela inicial.....	47
Figura 18 - Janela principal.....	48
Figura 19 - Posição do rato.....	50
Figura 20 - Caixa opções de visualização.....	50
Figura 21 - Barra com dicas de ajuda.....	50
Figura 22 - Fluxograma de funcionamento do programa STAY2D.....	51
Figura 23 - Janela principal com estrutura em desenvolvimento.....	52
Figura 24 - Painel propriedade dos elementos.....	53
Figura 25 - Painel condições de apoio.....	53
Figura 26 - Painel cargas.....	54

Figura 27 - Área de criação e manipulação do modelo com estrutura definida para análise.	55
Figura 28 - Área de resultados na vista de reações de apoio.	55
Figura 29 - Diagrama de esforço axial da estrutura.	56
Figura 30 - Diagrama de esforço transversal da estrutura.	57
Figura 31 - Diagrama de momento fletor da estrutura.	57
Figura 32 - Configuração deformada da estrutura.	58
Figura 33 - Relatório da análise produzido pelo STAY2D.	59
Figura 34 - Estruturas selecionadas para efeitos de comparação.	64
Figura 35 - Reações de apoio da viga simplesmente apoiada.	65
Figura 36 - Diagramas de esforço transversal da viga simplesmente apoiada.	66
Figura 37 - Diagramas de momento fletor da viga simplesmente apoiada.	67
Figura 38 - Configurações deformadas da viga simplesmente apoiada.	67
Figura 39 - Reações de apoio do pórtico plano.	68
Figura 40 - Diagramas de esforço axial do pórtico plano.	69
Figura 41 - Diagramas de esforço transversal do pórtico plano.	70
Figura 42 - Diagramas de momento fletor do pórtico plano.	71
Figura 43 - Configurações deformadas do pórtico plano.	72
Figura 44 - Reações de apoio do pórtico plano com um elemento inclinado.	73
Figura 45 - Diagramas de esforço axial do pórtico plano com um elemento inclinado.	74
Figura 46 - Diagramas de esforço transversal do pórtico plano com um elemento inclinado.	75
Figura 47 - Diagramas de momento fletor do pórtico plano com um elemento inclinado.	76
Figura 48 - Configurações deformadas do pórtico plano com um elemento inclinado.	77

## Índice de tabelas

Tabela 1 - Classes que constituem o <i>software</i> STAY2D.	45
---	----



## Abreviaturas e acrónimos

CPU	<i>Central Processing Unit</i>
IDE	<i>Integrated Development Environment</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
POO	Programação orientada a objetos
STAY2D	<i>Two-Dimensional Structural Analysis</i>
VB.NET	<i>Visual Basic .NET</i>



## Lista de símbolos

### Letras latinas maiúsculas

$[K]$	Matriz de rigidez da estrutura
$[T]$	Matriz de transformação
$[T]^T$	Matriz de transformação transposta
$\{P\}$	Vetor cargas
$\{R\}$	Vetor reações de apoio
A	Área da secção transversal do elemento
E	Módulo de elasticidade ou módulo de Young
$I_z$	Momento de inércia em torno do eixo z
L	Comprimento do elemento
P	Carga concentrada

### Letras latinas minúsculas

$[k]$	Matriz de rigidez de um elemento
$\{p\}$	Vetor de forças nodais
$\{q\}$	Vetor de ações de extremidade de um elemento
$\{u\}$	Vetor de deslocamentos
$\{p_k\}$	Vetor de forças conhecidas
$\{p_u\}$	Vetor de forças desconhecidas
$\{u_k\}$	Vetor de deslocamentos conhecidos
$\{u_u\}$	Vetor de deslocamentos desconhecidos
a	Comprimento do elemento à esquerda da carga concentrada
b	Comprimento do elemento à direita da carga concentrada
w	Carga uniformemente distribuída

### Letras gregas

$\varepsilon$	Deformação específica
$\sigma$	Tensão



## Capítulo 1

---

# INTRODUÇÃO



## **1. Introdução**

O trabalho em questão consistiu no desenvolvimento de uma ferramenta informática, denominada STAY2D, que permitisse a análise, tendo em conta a sua estatia, de estruturas bidimensionais.

### **1.1 Enquadramento e motivação**

O cálculo de pórticos surge entre os anos 1850 e 1875, graças a Maxwell, Castigliano e Mohr, sendo que as primeiras análises de estruturas (treliças e pórticos) surgem nos Estados Unidos e na Dinamarca, em 1920 (Kassimali, 2009). Hardy Cross introduz, em 1932, o processo de distribuição dos momentos, sendo este o método de cálculo mais eficiente durante 25 anos (Eaton, 2001).

De forma gradual, os Engenheiros Civis têm-se deparado com novos desafios, sendo-lhes exigido mais competências e um maior rigor, em concordância com a tecnologia ao seu dispor. O aparecimento do primeiro computador deu-se em 1944, intitulado como Mark I, construído pelo Professor Howard Aiken, da Universidade de Harvard, em Cambridge, e em parceria com a Marinha Norte-Americana e IBM (International Business Machines) (M.V.I., 2013).

Nos dias de hoje, as ferramentas informáticas são de extrema importância, desde um simples aplicativo para cálculo expedito, a programas de desenho, análise de custo, planeamento e conceção de projetos, até aos programas de elementos finitos de análise e dimensionamento estrutural. Através delas consegue-se uma maior eficiência e produtividade, tanto a nível de processamento de cálculos, como a nível de tempo despendido e segurança em comparação com possíveis erros cometidos manualmente.

O fato destas ferramentas informáticas serem capazes de resolver sistemas matemáticos de tamanha complexidade, no menor tempo possível e abrangendo uma maior diversidade de áreas, faz com que a competitividade dos mercados aumente de forma benéfica para o utilizador. No entanto, é necessário evidenciar que a utilização consciente e informada das ferramentas informáticas existentes fica a cargo do utilizador final, com o intuito de obter a melhor solução, do ponto de vista da qualidade, funcionalidade e custo.

Dada a importância destas ferramentas, a presente dissertação irá focar-se no desenvolvimento de uma plataforma de apoio ao ensino, no que diz respeito à análise de estruturas a duas dimensões.

## 1.2 Objetivos

O objetivo primordial desta dissertação é o desenvolvimento de um *software* para análise estrutural bidimensional, como referido anteriormente, de estruturas isostáticas e hiperestáticas.

Posto isto, objetivou-se também que esta ferramenta informática, que tem como público alvo os estudantes do curso de Engenharia Civil, possuisse uma interface gráfica intuitiva, apelativa e amigável de maneira a que os seus utilizadores obtenham conhecimento, sensibilidade e contato na área das estruturas, nomeadamente, na análise estrutural. Pretende-se então com esta ferramenta, que o utilizador possa compreender como diferentes e diversos tipos de solicitações, configurações geométricas e características materiais influenciam o comportamento de uma estrutura.

A linguagem de programação utilizada na conceção deste *software* foi *Visual Basic .NET* (VB.NET), pois é um tipo de linguagem intuitiva, no que diz respeito à sua sintaxe, e é uma linguagem orientada a objetos.

## 1.3 Estrutura da dissertação

O presente documento encontra-se dividido em sete capítulos. Após um breve enquadramento teórico, acerca de análise de estruturas e da evolução das ferramentas informáticas, na área de Engenharia Civil, segue-se o segundo capítulo, onde se encontram descritos os conceitos necessários à compreensão deste trabalho, relacionados essencialmente com a análise de estruturas.

No terceiro capítulo apresenta-se o método de cálculo usado para a análise de estruturas bidimensionais, onde são descritos, sucintamente, processos para a construção do algoritmo de cálculo e posterior implementação no *software* STAY2D.

O quarto capítulo tem como objetivo introduzir uma visão geral sobre a linguagem de programação usada na conceção do programa de cálculo em questão.

Posteriormente, no capítulo cinco é apresentado o programa desenvolvido – STAY2D – onde se apresenta as suas principais características e funcionalidades, do ponto de vista do utilizador.

De forma a exemplificar e constatar a fiabilidade do *software* desenvolvido, resolveram-se alguns exemplos “tipo” em diferentes programas de cálculo, formando o capítulo seis.

Por último, o capítulo sete apresenta as considerações finais sobre o trabalho realizado, bem com propostas para possíveis desenvolvimentos futuros referentes a este trabalho.



## Capítulo 2

---

# ENQUADRAMENTO TEÓRICO



## **2. Enquadramento teórico**

### **2.1 Estruturas**

Entenda-se por estrutura, o conjunto de peças lineares (barras) ligadas entre si, nos nós, de diferentes formas, originando vários tipos de estruturas segundo a sua ligação. O objetivo principal das estruturas é oferecer resistência mecânica aos diferentes esforços a que estão sujeitas.

#### **2.1.1 Tipos de estruturas**

Existem dois tipos de estruturas principais, as articuladas e as contínuas. As articuladas, são definidas como sendo um sistema de barras rígidas interligadas por extremidades rotuladas, articulações sem atrito nos nós, de forma a criar um sistema estável. Por outro lado, as estruturas contínuas ou reticuladas são formadas por barras que concorrem num nó, e cujos ângulos entre elas permanecem inalterados, quer no início, quer no fim da deformação (Romão, 2002).

Segundo Lopes (2012), as estruturas articuladas apenas estão sujeitas a um tipo de esforço (axial), enquanto que as contínuas, no plano, estão sujeitas a três tipos de esforços (axial, transversal e momento fletor).

#### **2.1.2 Esforços**

No seguinte fluxograma (figura 1) é apresentado os diferentes tipos de esforços que são imputados a uma estrutura.

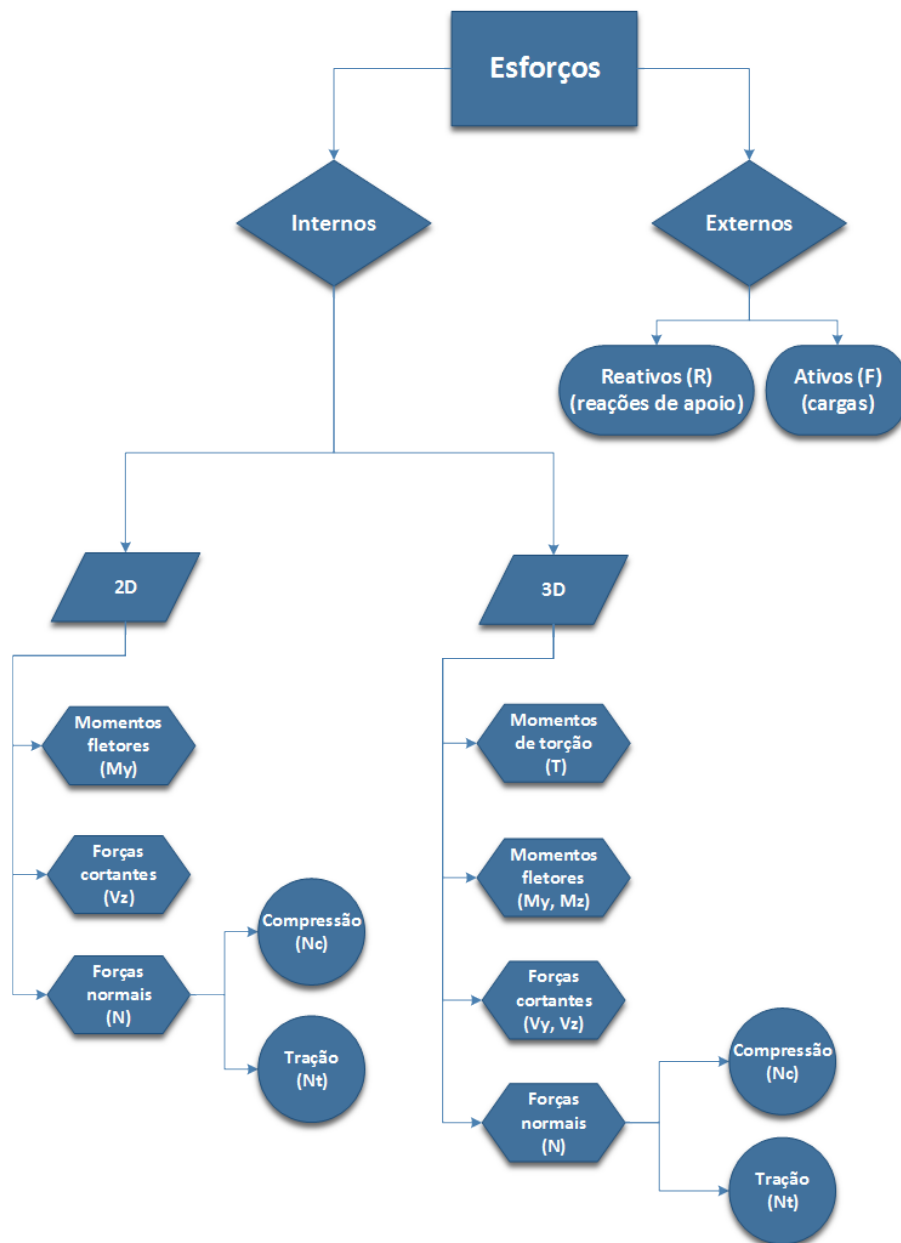


Figura 1 - Classificação dos esforços/forças.

### 2.1.3 Condições de apoio

Entendem-se por apoios os sistemas que interligam o corpo rígido com o exterior, de forma a impedir translações e rotações, que por si originam as reações exercidas no corpo rígido pelo exterior. Das diferentes combinações, provenientes das restrições destes movimentos (graus de liberdade), resultam diferentes tipos de apoios, tais como apoios simples, apoios duplos e encastramentos.

### 2.1.4 Estatia

No que diz respeito à estabilidade, as estruturas podem ser definidas como hipostáticas (figura 2a), isostáticas (figura 2b) e hiperestáticas (figura 2c). Nas estruturas hipostáticas não existe o número de ligações estruturais suficientes para que haja estabilidade. Já nas isostáticas, o número de ligações estruturais é suficiente para a existência de estabilidade. Por outro lado, as estruturas hiperestáticas têm um número de ligações estruturais superior ao necessário, para a existência de estabilidade (Neves, 2007).

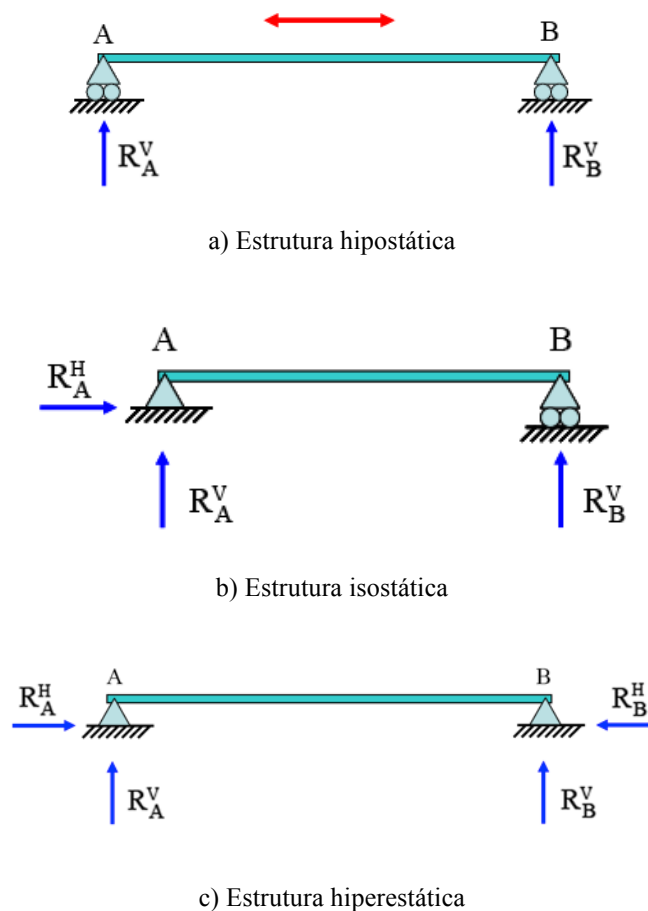


Figura 2 - Tipos de estatia (Romão, 2002).

Para calcular a estatia de uma estrutura podemos dividi-la em estatia exterior e interior. Sendo a estatia exterior responsável pela avaliação do número de ligações ao exterior, temos:

- Estrutura hipostática, se possuir um número de incógnitas inferior às equações da estática, não existindo equilíbrio, ou seja, a estrutura é um mecanismo;

- Estrutura isostática, se possuir um número de incógnitas igual às equações da estática, existindo equilíbrio. As reações de apoio podem ser calculadas através das equações de equilíbrio;
- Estrutura hiperestática, se possuir um número de incógnitas superior às equações da estática, existindo equilíbrio. As reações de apoio, nesta situação, não podem ser calculadas apenas recorrendo às equações de equilíbrio.

No que diz respeito à estadia interior, esta é semelhante à exterior, sendo responsável pela avaliação do número de ligações dos elementos barra. Posto isto, tem-se que a estadia da estrutura (global) é a soma da estadia interior com a exterior, ressalvando o fato de que a estadia interior não pode compensar a estadia exterior (Neves, 2007).

## **2.2 Análise estrutural**

A fase do projeto estrutural, onde é idealizado o comportamento da estrutura, é denominada por análise estrutural. Tal comportamento pode ser traduzido por diversos parâmetros, tais como campos de tensões, deslocamentos e deformações na estrutura. De uma forma generalizada, o objetivo da análise estrutural consiste na determinação de esforços internos e externos (cargas e reações de apoio), das tensões associadas, bem como a determinação dos deslocamentos e por conseguinte as deformações da estrutura em dimensionamento. Posto isto, interessa referir que este tipo de análise deve ser efetuada para os diferentes, e possíveis, estágios de carregamentos e solicitações previamente determinados (Martha, 2010).

### **2.2.1 Tipos de análise**

Os tipos de análise dividem-se em dois grupos:

#### **a) Análise dinâmica ou estática**

Em geral, as ações sobre as estruturas são dinâmicas, sendo necessário considerar as forças de inércia associadas às acelerações a que cada um dos componentes fica sujeito. Desta forma, seria expectável que a análise de uma estrutura teria, obrigatoriamente, de ter em consideração os efeitos dinâmicos. Não obstante, em muitas situações, é razoável considerar que as ações são aplicadas de um modo suficientemente lento, fazendo com que as forças de inércia sejam desprezáveis. Nestes casos, está-se na presença de uma análise designada estática (Azevedo, 2003).

Interessa referir que, o funcionamento do programa STAY2D é baseado numa análise estática, pois não é relevante considerar a variação das cargas ao longo do tempo para este projeto.

b) Análise linear ou não linear

b.1) Análise Linear

De acordo com Timoshenko e Goodier (1980), todos os materiais utilizados na engenharia possuem propriedades elásticas até um certo grau. Neste tipo de análise, os materiais são considerados elástico-lineares, entendendo-se por elasticidade de um material a sua capacidade de retomar à sua configuração inicial, após deformações provocadas por ações externas, com posterior alívio de carregamento (figura 3a) (Fontes, 2005). Entende-se por material perfeitamente elástico, aquele que consegue recuperar totalmente a sua forma original (figura 3b), e material parcialmente elástico, aquele em que apenas parte da deformação é revertida.

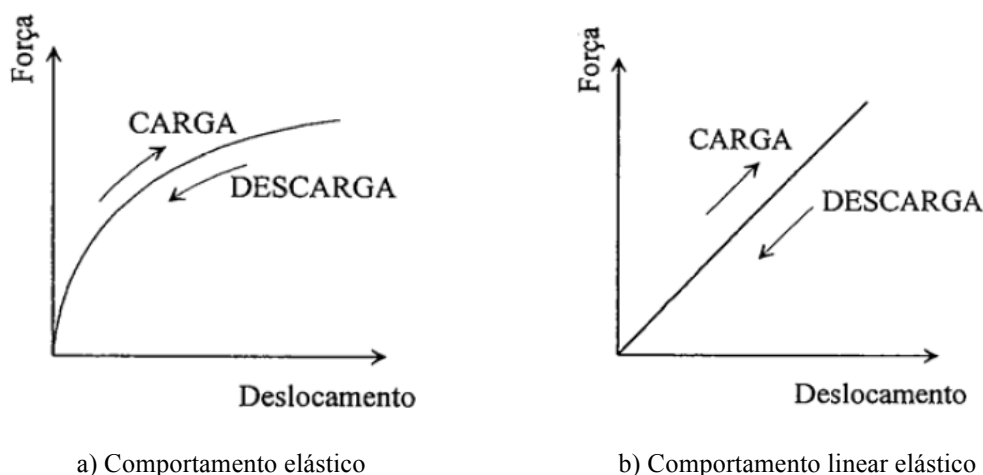


Figura 3 - Análise linear (Vila-Real, 1997).

Hooke, em 1678, refere que as deformações relacionam-se, em todos os seus pontos, com as tensões, num sólido contínuo, através de relações lineares e homogêneas (Varum, 2007). Este cientista foi o primeiro a estabelecer, experimentalmente essa relação culminando na conhecida Lei de Hooke (hipótese da proporcionalidade, expressão 1) (Jardine, 2004).

$$\sigma = E \times \varepsilon \quad (1)$$

### b.2) Análise não-linear

Este tipo de análise prevê o comportamento do elemento que é carregado para além do limite elástico do material, fazendo com que este entre no patamar das deformações plásticas, e não retorne à sua configuração inicial (Vicich *et al.*, 2007). Deformações de segunda ordem ou devido a leis constitutivas dos materiais não-lineares resulta num comportamento não linear das estruturas, sendo estes designado por não-linearidade geométrica e não-linearidade material, respetivamente (Reis e Camotim, 2001 e Azevedo, 1985).

No presente trabalho foi usado o tipo de análise linear, visto ser um processo de aplicação simples e o principal lecionado em unidades curriculares de estruturas no curso de Engenharia Civil.

### **2.2.2 Formulação baseada na rigidez**

É comum nos cursos de Engenharia Civil e Engenharia Mecânica iniciar-se o ensino da análise de estruturas limitado a vigas, pórticos, treliças e grelhas. Estruturas constituídas por barras prismáticas, cuja secção apresenta dimensões bastante inferiores ao comprimento do seu eixo, são intituladas estruturas reticuladas. As não reticuladas são, por norma, estudadas como meios contínuos, como por exemplo as paredes, lajes, cascas e sólidos. É nas estruturas reticuladas onde surgem conceitos comuns à generalidade das estruturas, nomeadamente, equilíbrio, compatibilidade, tensão, deformação, relação entre tensão e deformação, entre outros. No âmbito destas estruturas, torna-se particularmente simples a explicação dos métodos das forças e dos deslocamentos, bem como outras técnicas que por norma são difíceis de imputar aos meios contínuos.

O Método dos Elementos Finitos (MEF), no âmbito da Engenharia de Estruturas, tem por objetivo a determinação dos estados de tensão e deformação de um sólido, de geometria arbitrária, sujeito a ações exteriores. No que diz respeito a este tipo de análise, esta tem designação genérica de análise de estruturas, sendo que a sua manifestação surge, por exemplo, no estudo de pontes, barragens ou edifícios. Por norma, na necessidade de se projetar uma estrutura, é usual proceder-se a uma sucessão de análises e modelações, referente às suas características, de maneira a alcançar uma solução satisfatória, tanto em termos económicos, como na verificação dos pré-requisitos funcionais e regulamentares (Azevedo, 2003).

De acordo com Zienkiewicz e Taylor (1988), a formulação do MEF pode ser baseada em modelos de equilíbrio, em métodos híbridos ou no método dos deslocamentos. De todos



estes métodos, o que apresenta maior simplicidade e uma maior versatilidade é o método dos deslocamentos. Este método visa a determinação da solução que garanta que as condições de equilíbrio sejam também satisfeitas, dentro do conjunto de soluções de deslocamentos, que satisfazem as condições de compatibilidade. As principais incógnitas, neste método, são os deslocamentos, verticais e horizontais, e as rotações. Na utilização do método dos deslocamentos, a sequência de introdução das condições básicas segue a seguinte ordem (Martha, 2010):

- Condições de compatibilidade;
- Leis constitutivas dos materiais;
- Condições de equilíbrio.

Na figura 4, a título de exemplo, apresenta-se a configuração deformada de um pórtico plano, que consiste em substituir a estrutura a analisar por um sistema de soluções cinematicamente determinados, designado por sistema-base. Como referido anteriormente, as incógnitas são os deslocamentos, neste caso independentes, calculados de forma a obrigar a sistema-base a tornar-se estática e cinematicamente equivalente à estrutura em análise (Martha, 2010).

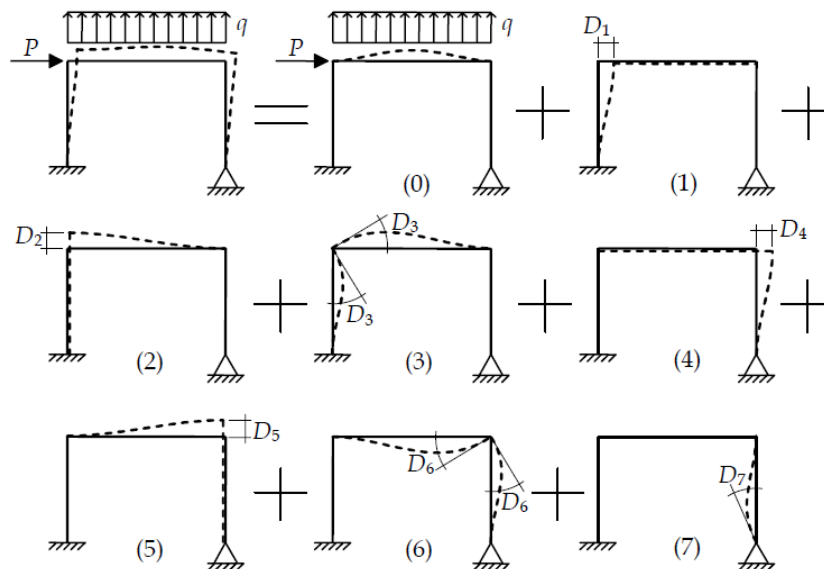


Figura 4 - Configuração deformada de um pórtico plano, através da sobreposição das diferentes configurações deformadas (Martha, 2010).

O Método dos Deslocamentos não é adequado para implementação computacional, pois torna-se menos eficiente para a análise de estruturas mais complexas. Alternativamente, pode usar-se o Método da Rigidez Direta (*Direct Stiffness Method*) que representa uma

versão moderna do clássico Método dos Deslocamentos na análise de estruturas, sendo a sua principal área de implementação a nível computacional (Martha, 2010). Este método é um procedimento que serve de base para a maioria dos programas utilizados na análise de estruturas, visto que pode ser aplicado em quase todos os tipos de estrutura (ex. treliças, vigas contínuas, pórticos indeterminados, placas e cascas), pois permite uma programação simplificada e com grande eficiência. Pode dizer-se que este método é a implementação mais comum do MEF (Leet, Uang e Gilbert, 2008).

O Método da Rigidez Direta exige a divisão da análise de uma estrutura em diversos casos simples que, quando sobrepostos, são equivalentes à estrutura original. Não obstante, em vez de escrever equações de compatibilidade em termos de forças redundantes desconhecidas e coeficientes de flexibilidade, este método escreve equações de equilíbrio de nós em termos de deslocamentos de nós desconhecidos e coeficientes de rigidez (i.e. forças produzidas por deslocamentos unitários). Após o conhecimento dos deslocamentos dos nós, pode-se calcular as forças nos membros a partir de relações força-deslocamento (Leet, Uang e Gilbert, 2008).

Sendo este o método utilizado como base de cálculo na conceção do *software* STAY2D, o seu processo irá ser descrito, como referido anteriormente, no capítulo seguinte.

## Capítulo 3

---

# MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA (*DIRECT STIFFNESS METHOD*)



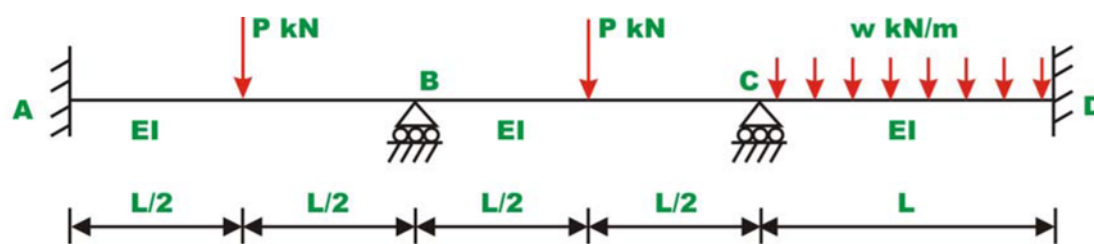
### 3. Método da Rigidez Direta (*Direct Stiffness Method*)

A análise de vigas e pórticos planos, através deste método, subentende que as cargas possam ser aplicadas nos nós, bem como ao longo do comprimento dos elementos, resultando, deste modo, em momentos fletores, esforços axiais e transversos (Leet, Uang e Gilbert, 2008). No que diz respeito às deformações da estrutura, estas apenas serão axiais e de flexão. Inicialmente, a matriz de rigidez de cada elemento é construída segundo o sistema de eixos locais e, posteriormente, transformada para o sistema de eixos globais. Uma vez que este tipo de estruturas tem os seus membros orientados em diferentes direções, torna-se necessário, antes da construção da matriz de rigidez global da estrutura, remeter cada matriz de rigidez, de cada membro, para o mesmo sistema de eixos – sistema de eixos global. Isto é alcançado através da transformação de forças e deslocamentos para este mesmo sistema de coordenadas. Tendo em conta que na utilização deste método cada membro é analisado individualmente, culminando na assemblagem da matriz de rigidez de cada um deles para a obtenção da matriz de rigidez global da estrutura, introduz-se, de seguida, a aplicação deste numa viga contínua (Ramachandra e Kumar, 2008).

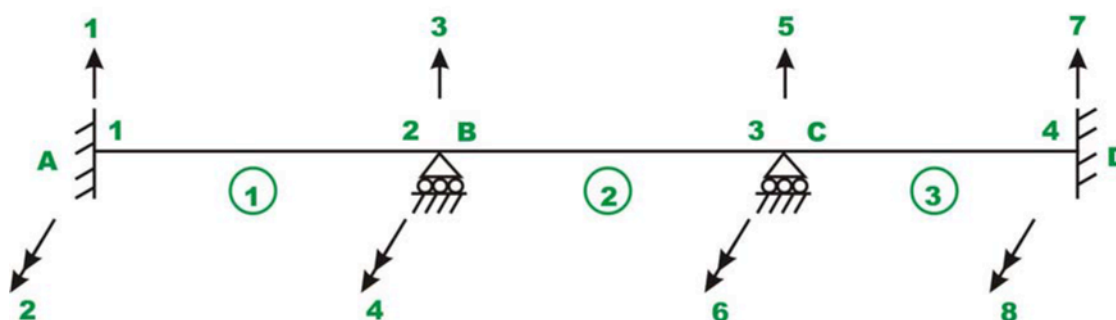
Interessa referir que, os subcapítulos seguintes são, essencialmente, baseados nos trabalhos de Ramachandra & Kumar (2008) e Weaver & Gere (1990).

#### 3.1 Viga contínua

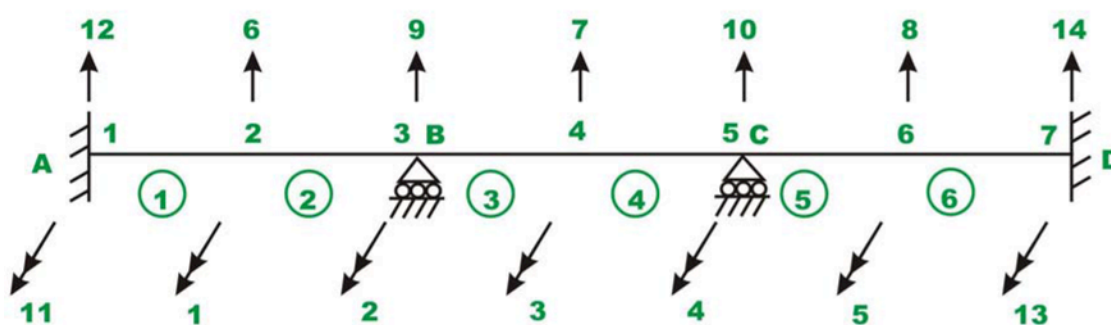
Para a obtenção da matriz de rigidez global de uma viga contínua (figura 5a) proceder-se-á à divisão desta em três membros (figura 5b), sendo a matriz de rigidez de cada membro formada individualmente e, posteriormente, efetuada a sua assemblagem. Interessa referir que cada nó está localizado nos apoios, visto por vezes ser necessário considerar um nó entre apoios. Isto deve-se a uma eventual mudança abrupta da área de secção transversal do elemento, ou caso seja necessário calcular os deslocamentos transversais, ou rotacionais num ponto intermédio (figura 5c). Se as deformações axiais forem ignoradas, cada nó irá ter apenas dois graus de liberdade (sem considerar as condições de apoio) – deslocamento vertical, correspondente ao esforço transversal, e rotação, correspondente ao momento fletor (figura 5b).



a) viga contínua em questão



b) numeração de nós e elementos com graus de liberdade



c) nós intermédios e respetivos graus de liberdade

Figura 5 - Viga contínua.

Na figura 5, a numeração inserida dentro de círculos refere-se ao número do elemento, a numeração próxima dos apoios refere-se ao número do nó, as setas superiores indicam o deslocamento transversal, como grau de liberdade e as inferiores a rotação, como grau de liberdade, estando cada uma devidamente numerada. É importante referir que na figura 5c estão representados possíveis graus de liberdade, sem ter em conta as condições de apoio, no caso de se introduzir um nó, no ponto intermédio do membro. Desta forma, na mesma figura, a numeração mais baixa (1 a 8) representa os graus de liberdade desconhecidos (graus de liberdade livres) e a numeração mais alta (9 a 14) os graus de liberdade conhecidos (graus de liberdade fixos).

### 3.1.1 Matriz de rigidez da viga

Na figura 6 é apresentada uma viga prismática<sup>1</sup> que tem as suas extremidades totalmente restringidas, ou seja, uma viga bi-encastada, no sistema de coordenadas local  $x'y'z'$ . Sejam os seus nós  $j$  e  $k$ , e considerando que a viga tem comprimento  $L$ , área da secção transversal  $A$ , momento de inércia em torno de  $z'$  de  $I_{zz}$  e módulo de elasticidade  $E$ .

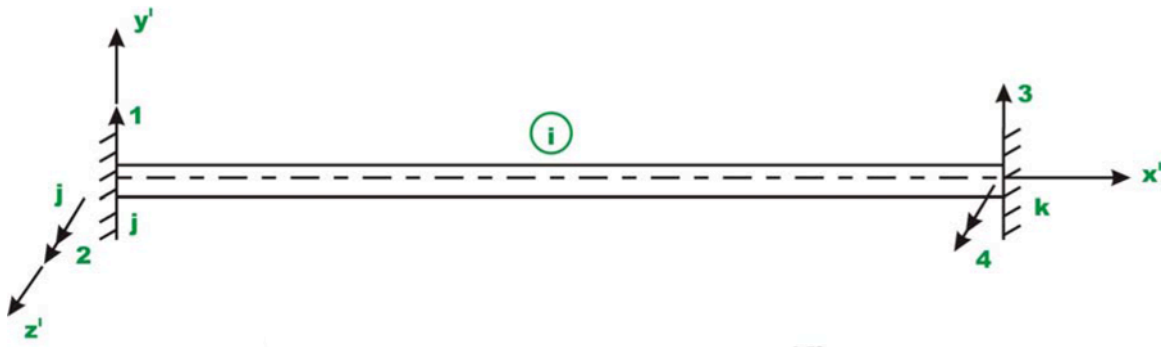
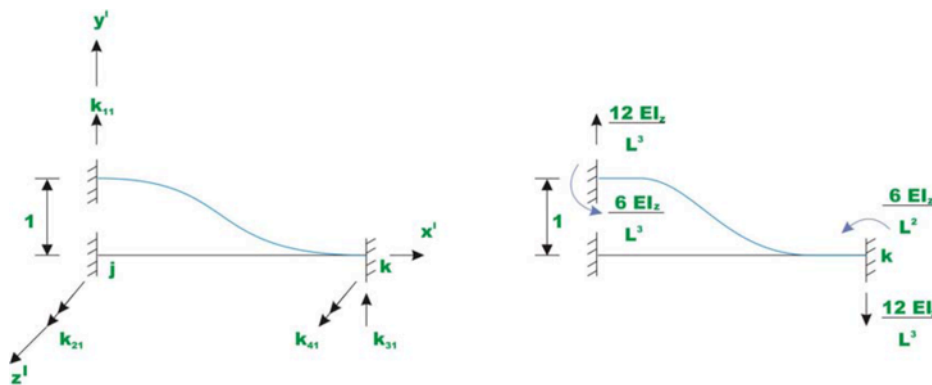


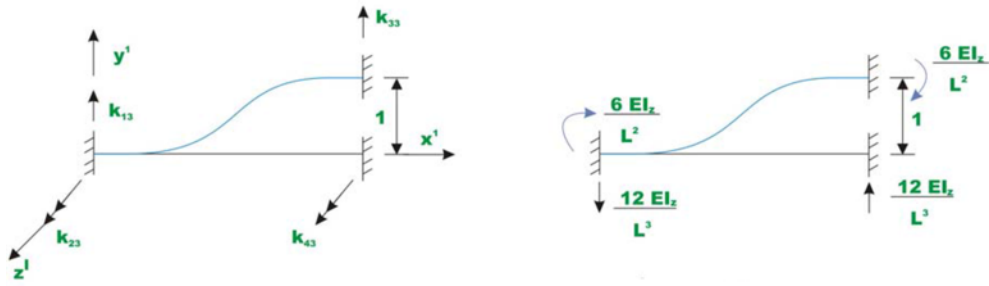
Figura 6 - Tramo da viga contínua.

Os coeficientes presentes na matriz de rigidez deste elemento são os coeficientes de rigidez da barra necessários para satisfazer o equilíbrio em cada configuração deformada, após a imposição de um deslocamento, ou rotação unitária. Na figura 7 estão representados esses coeficientes após aplicação, em ambas as extremidades, de um deslocamento e rotação unitários, em cada um dos graus de liberdade, considerando os restantes iguais a zero.

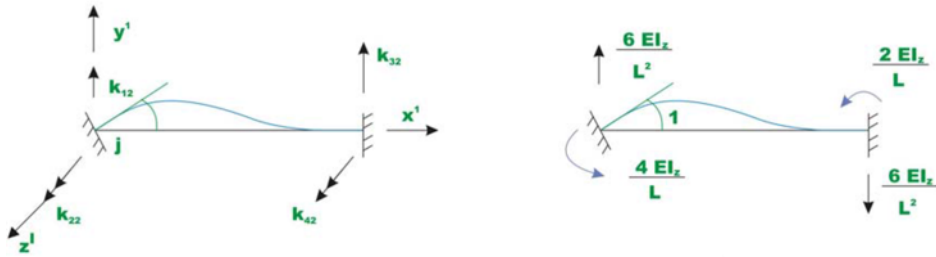


a) Deslocamento unitário no nó j

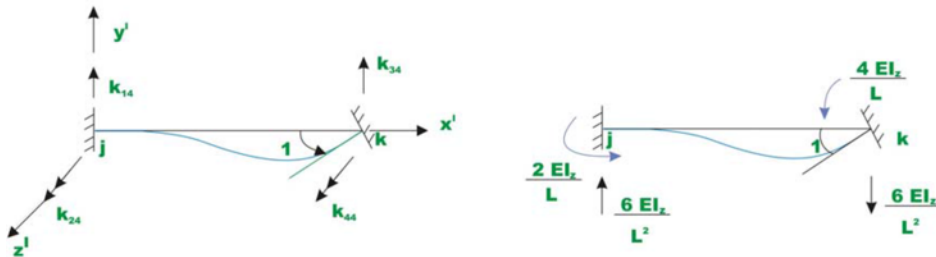
<sup>1</sup> Entenda-se por viga prismática uma barra de secção constante e de eixo retilíneo (Leet, Uang e Gilbert, 2008).



b) Deslocamento unitário no nó k



c) rotação unitária no nó j



d) rotação unitária no nó k

Figura 7 - Cálculo da matriz de rigidez da viga.

Após os coeficientes de rigidez estarem calculados, obtém-se a matriz de rigidez da viga (expressão 2):

$$[k] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad (2)$$



Pode-se constatar que esta é simétrica, estando particionada para se compreender melhor as ações associadas aos dois nós do elemento.

### 3.1.2 Matriz de rigidez global da viga

Finalizada a construção da matriz de rigidez de um membro, procede-se à construção da matriz de rigidez global, com o auxílio de uma viga contínua constituída por dois tramos (figura 8).

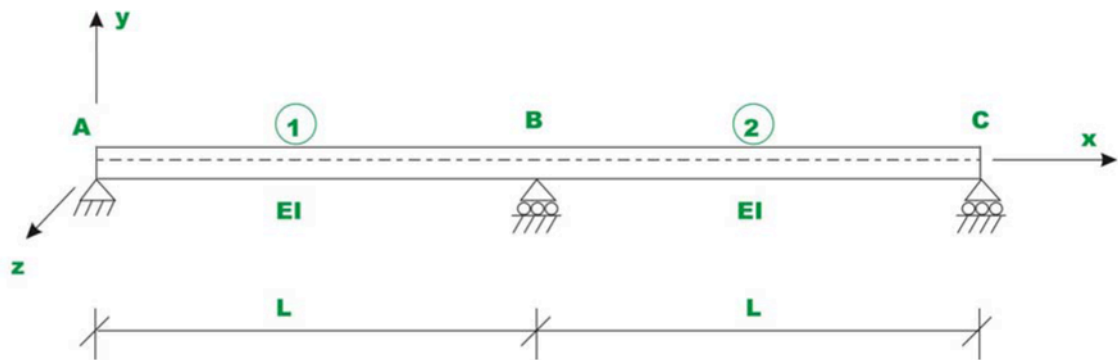


Figura 8 - Viga contínua.

No caso de vigas contínuas, o sistema de eixos local coincide com o sistema de eixos global, não sendo necessária a transformação da matriz de rigidez do elemento para o sistema de eixos global.

Para a formulação da matriz de rigidez global, primariamente, assume-se que todos os nós estão restringidos, como demonstrado na figura 9, onde também está presente a numeração dos nós e membros, bem como os possíveis graus de liberdade.

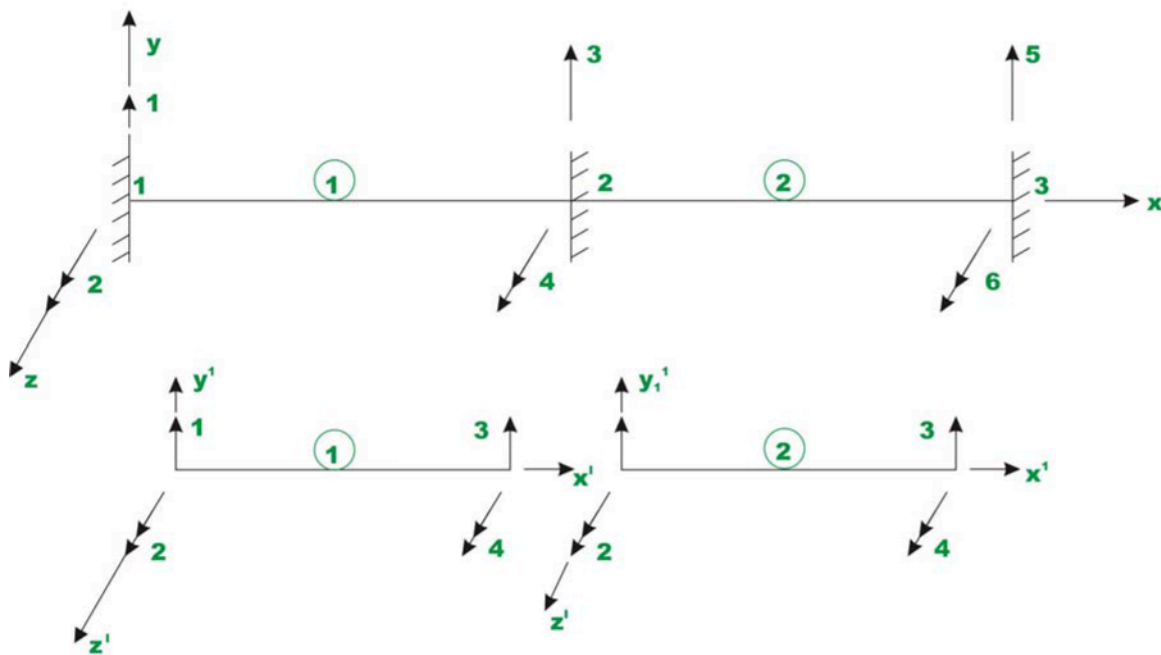


Figura 9 - Representação das restrições, numeração de membros e nós e possíveis graus de liberdade.

Visto que da divisão da viga contínua resultam dois membros exatamente iguais, então a matriz de rigidez do elemento 1 (figura 10a) irá ser igual à do elemento 2 (figura 10b), tal como apresentado seguidamente:

$$\begin{array}{l}
 \text{g.d.l. globais} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\
 \text{g.d.l. locais} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\
 [k^1] = \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} & k'_{13} & k'_{14} \\ k'_{21} & k'_{22} & k'_{23} & k'_{24} \\ k'_{31} & k'_{32} & k'_{33} & k'_{34} \\ k'_{41} & k'_{42} & k'_{43} & k'_{44} \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \\ 3 \quad 3 \\ 4 \quad 4 \end{array}
 \end{array}$$

a) elemento 1

$$\begin{array}{l}
 \text{g.d.l. globais} \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\
 \text{g.d.l. locais} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\
 [k^2] = \begin{bmatrix} k^2_{11} & k^2_{12} & k^2_{13} & k^2_{14} \\ k^2_{21} & k^2_{22} & k^2_{23} & k^2_{24} \\ k^2_{31} & k^2_{32} & k^2_{33} & k^2_{34} \\ k^2_{41} & k^2_{42} & k^2_{43} & k^2_{44} \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1 \quad 3 \\ 2 \quad 4 \\ 3 \quad 5 \\ 4 \quad 6 \end{array}
 \end{array}$$

b) elemento 2

Figura 10 - Matriz de rigidez dos elementos.

Como se pode constatar na figura 10 estão evidenciados os graus de liberdade globais e locais, uma vez que isto auxilia no posicionamento dos coeficientes das matrizes de rigidez dos elementos, na matriz de rigidez global. Designe-se por  $[K]$  a matriz de rigidez da viga contínua, sendo esta escrita como apresenta a figura 11:

$$[K] = \begin{array}{c} \text{Membro AB (1)} \\ \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 \\ \hline k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 + k_{11}^2 & k_{34}^1 + k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 + k_{21}^2 & k_{44}^1 + k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ \hline 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{array} \right] \\ \text{Membro BC (2)} \end{array}$$

Figura 11 - Matriz de rigidez global da viga contínua.

Podemos constatar que a secção 4x4 do canto superior esquerdo sobrepõe-se à secção 4x4 do canto inferior direito, uma vez que o ponto B da viga contínua (figura 8) é partilhado por ambos os membros. Desta forma, os graus de liberdade 3 e 4 da matriz de rigidez global são a soma dos coeficientes de rigidez, provenientes de cada membro.

### 3.1.3 Vetor de cargas

Por norma, os diversos carregamentos a que estão sujeitas as estruturas, no decorrer da sua vida útil, não estão diretamente aplicados sobre os nós, mas sim ao longo dos elementos estruturais (Martin, 1966). No entanto, a matriz de rigidez de cada membro é construída com base nas forças nodais (aplicadas pontualmente nos nós), tornando-se necessário substituir as diversas cargas aplicadas ao longo do elemento por forças nodais equivalentes. É importante referir que estas forças nodais são tais, que impõem à estrutura o mesmo estado de deformação do conjunto de carregamentos reais a que está sujeita. A sua determinação parte do princípio da sobreposição de efeitos, como se poderá observar na figura 12 de uma viga contínua ABC, cujo elemento AB possui uma carga concentrada  $P$ , BC uma carga distribuída  $w$  e o nó C uma carga nodal  $2P$ .

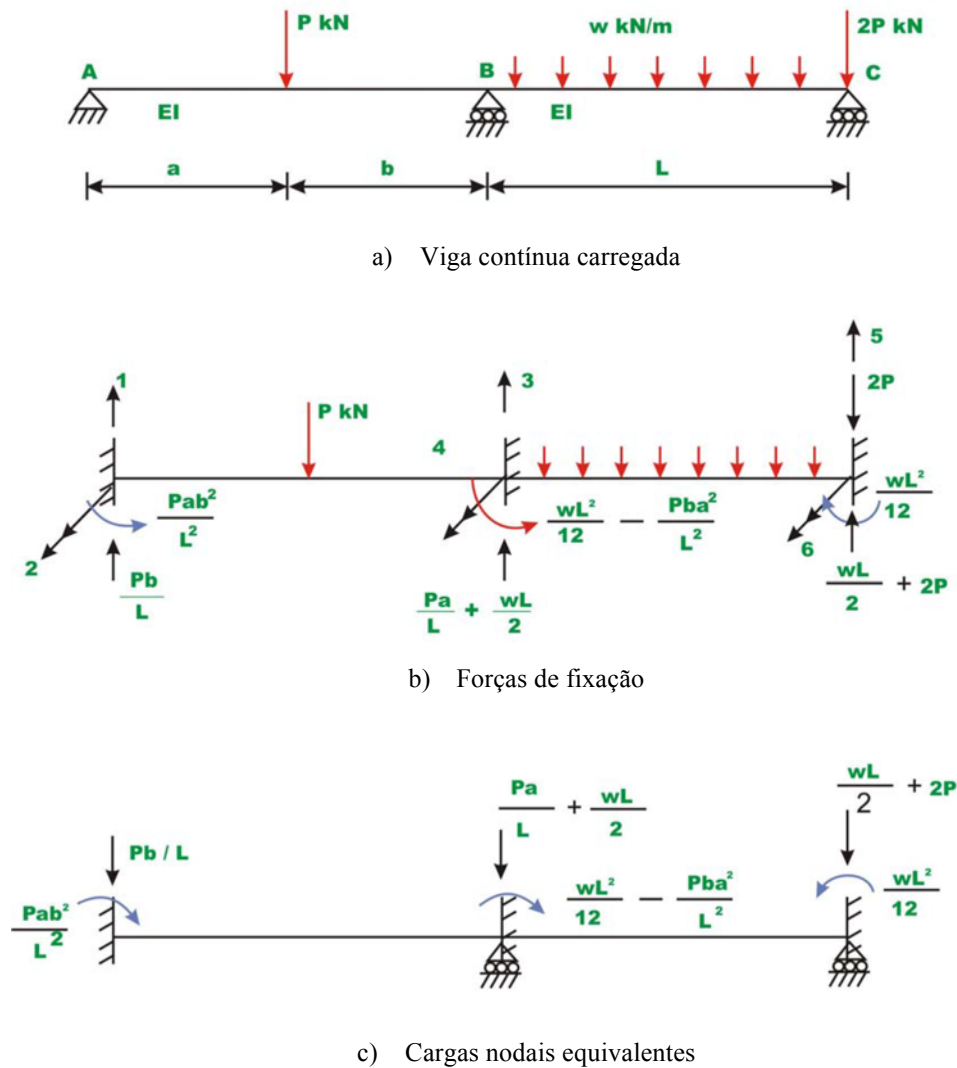


Figura 12 - Exemplo de quantificação das cargas nodais equivalente.

O somatório dos efeitos presentes na figura 12b) e c) correspondem ao carregamento original da viga (figura 12a). Segundo Gere e Weaver Junior (1965), se as ações de fixação forem invertidas, no que diz respeito ao seu sentido, formam um conjunto de forças e binários que é estaticamente equivalente às cargas nos membros, como se pode observar na figura 12c).

Considere-se  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$  e  $p_6$  como os valores das cargas nodais equivalentes ao longo do graus de liberdade 1, 2, 3, 4, 5 e 6, respetivamente, como mostra a figura 12b). Desta forma, o vetor de cargas globais fica como mostra a expressão 3.

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{Pb}{L} \\ -\frac{Pab^2}{L^2} \\ -\left(\frac{Pa}{L} + \frac{wL}{2}\right) \\ -\left(\frac{wL^2}{12} - \frac{Pba^2}{L^2}\right) \\ -\left(\frac{wL}{2} + 2P\right) \\ \frac{wL^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Interessa referir que o vetor de cargas globais será o somatório do vetor de cargas nodais e o vetor de cargas nodais equivalentes.

### 3.1.4 Solução para as equações de equilíbrio

Após a obtenção da matriz de rigidez global e do vetor de cargas da viga, a relação entre carga-deslocamento pode ser escrita da seguinte forma:

$$\{P\} = [K]\{u\} \quad (4)$$

Onde  $\{P\}$  é o vetor de cargas global,  $[K]$  é a matriz de rigidez global e  $\{u\}$  é o vetor deslocamentos. Uma vez que, nesta expressão alguns deslocamentos nodais, para as condições de apoio, são conhecidos, então pode-se escrever a expressão da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \{p_k\} \\ \{p_u\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_u\} \\ \{u_k\} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Onde  $\{p_k\}$  e  $\{u_k\}$  representam o vetor de forças e deslocamentos conhecidos, respetivamente, enquanto que  $\{p_u\}$  e  $\{u_u\}$  representam o vetor de forças e deslocamentos desconhecidos. Expandindo a expressão 5 obtém-se:

$$\{p_k\} = [k_{11}]\{u_u\} + [k_{12}]\{u_k\} \quad (6)$$

$$\{p_u\} = [k_{21}]\{u_u\} + [k_{22}]\{u_k\} \quad (7)$$

Uma vez que  $\{u_k\}$  é conhecido (ver expressão 6), então pode-se avaliar os deslocamentos desconhecidos. Interessa referir que estes sistemas de equações podem ser resolvidos através do método de eliminação de Gauss<sup>2</sup>, visto ser um método eficiente para a resolução de sistemas de equações lineares com bastantes incógnitas (Dean, 2014). O mesmo se passa para as reações de apoio, que podem ser avaliadas a partir da expressão 7, após o vetor dos deslocamentos desconhecidos estar formado.

Considere-se  $R_1$ ,  $R_3$  e  $R_5$  como as reações ao longo dos graus de liberdade fixos de acordo com a figura 13.

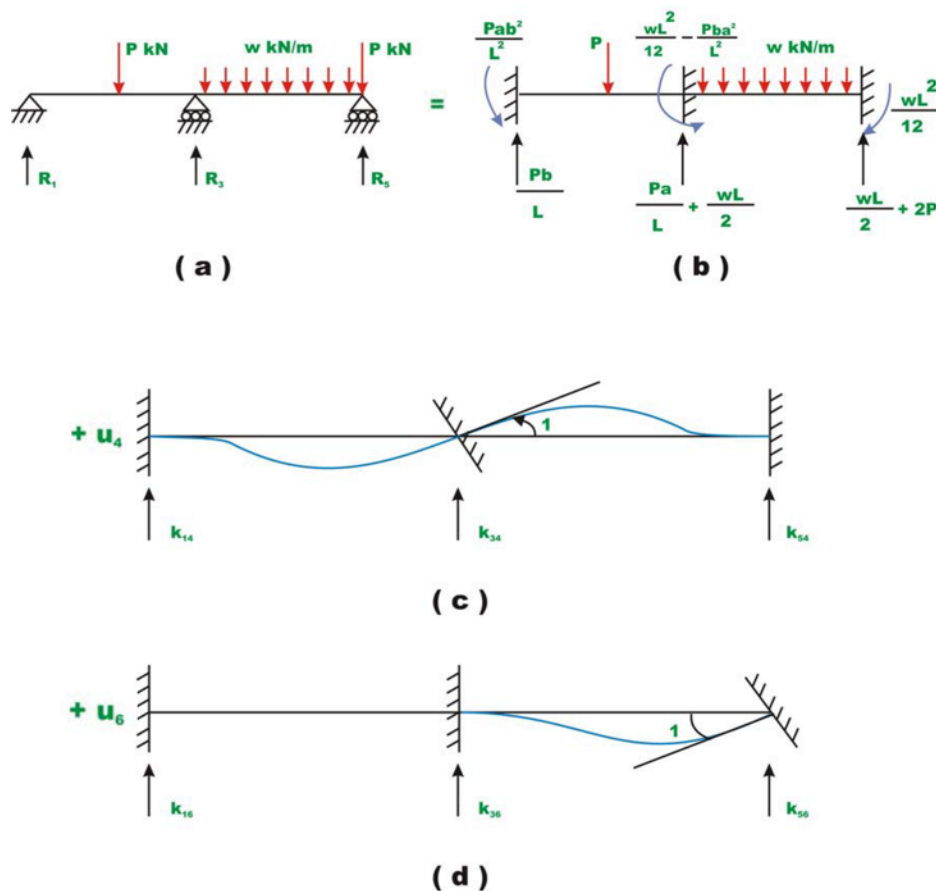


Figura 13 – Somatório das reações presentes em b), c) e d) para obtenção das reações de apoio demonstradas em a).

Visto que as cargas nodais equivalentes estão diretamente aplicadas nos apoios, torna-se necessário considerá-las no cálculo das reações dos mesmos, obtendo-se a seguinte expressão:

<sup>2</sup> Este método consiste em transformar o sistema linear original num sistema linear equivalente com matriz triangular superior (Meyer, 2000).

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_3 \\ R_5 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_3 \\ p_5 \end{Bmatrix} + [K_{21}]\{u_u\} \quad (8)$$

Posto isto, as reações de apoio podem ser calculadas através da soma das reações presentes nas imagens b), c) e d) da figura 13. Invocando o método da sobreposição de efeitos obtêm-se as expressões 9, 10 e 11:

$$R_1 = \frac{Pb}{L} + K_{14}u_4 + K_{16}u_6 \quad (9)$$

$$R_3 = \frac{Pa}{L} + K_{34}u_4 + 3u_6 \quad (10)$$

$$R_5 = \frac{wL}{2} + 2P + K_{54}u_4 + K_{56}u_6 \quad (11)$$

Ou neste caso:

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_3 \\ R_5 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} Pb/L \\ Pa/L \\ \frac{wL}{2} + 2P \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{14} & K_{16} \\ K_{34} & K_{36} \\ K_{54} & K_{56} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_4 \\ u_6 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Por último, as ações nas extremidades de cada elemento,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  e  $q_4$ , podem ser calculadas pela expressão 13. Para tal, considere-se o primeiro elemento da figura 13a, tem-se então:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{Pb}{L} \\ \frac{Pab^2}{L^2} \\ \frac{Pa}{L} \\ \frac{Pba^2}{L^2} \end{Bmatrix} + [K]_{elemento\ 1} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

De seguida, apresenta-se a aplicação do método de rigidez direta num pórtico plano, uma vez que é necessário utilizar determinados parâmetros que não foram considerados na viga contínua.

### **3.2 Pórtico plano**

No caso de pórticos planos, todos os elementos resistem no mesmo plano, estando interligados por nós rígidos. Os esforços internos resultantes de forças imputadas aos elementos da estrutura consistem em momentos fletores, esforços axiais e transversos. No que diz respeito às deformações da estrutura, estas são axiais e de flexão.

Na análise destas estruturas, inicialmente é construída a matriz de rigidez de cada elemento no sistema de eixos local e, posteriormente, transformada para o sistema de eixos globais. Uma vez que os elementos estão orientados em diferentes direções, antes da construção da matriz de rigidez global da estrutura é necessário remeter cada matriz de rigidez referente a cada elemento para o mesmo sistema de eixos – sistema de eixos global – como referido anteriormente. Isto é alcançado através da transformação de forças e deslocamentos para o sistema de eixos globais. Seguidamente, apresentam-se os passos supracitados.

#### **3.2.1 Matriz de rigidez de um elemento no sistema de eixos locais**

Considere-se o elemento presente na figura 14, no sistema de eixos locais  $x' y' z'$ . O elemento é concordante com o plano  $xy$  e, para simplificação do processo, considere-se que tem rigidez axial constante de  $EA$  e rigidez de flexão constante de  $EI$ . Os possíveis deslocamentos, em cada nó do elemento, são as translações nos eixos  $x'$  e  $y'$  e as rotações em torno do eixo  $z'$ .



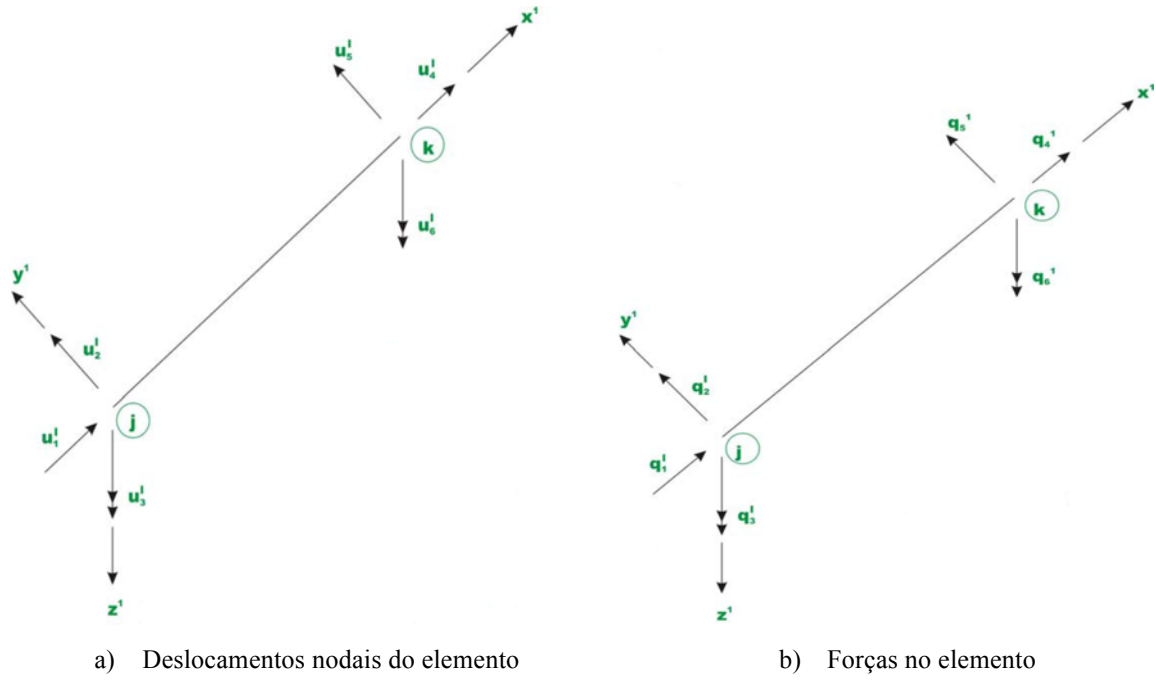


Figura 14 - Elemento no sistema de eixos locais.

Como se pode observar na figura 14a, os elementos possuem 6 graus de liberdade, sendo que na figura 14b estão representadas as forças atuantes, tanto no nó  $j$ , como no nó  $k$ . A relação entre carga-deslocamento no sistema de eixos locais pode ser descrita de acordo com a seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \\ q'_4 \\ q'_5 \\ q'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \\ u'_5 \\ u'_6 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Ou de uma forma mais sucinta como mostra a expressão 15:

$$\{q'\} = [k']\{u'\} \quad (15)$$

Onde  $\{q'\}$  representa as forças atuantes no elemento,  $[k']$  a matriz de rigidez do elemento e  $\{u'\}$  os deslocamentos nodais do elemento.

### 3.2.2 Transformação do sistema de eixos locais para os globais

Antes da montagem da matriz de rigidez global da estrutura é necessário transformar a matriz de rigidez de cada elemento no sistema de eixos global. Considere-se na figura 15a um elemento no sistema de eixos locais  $x' y' z'$ , sendo  $u'_1, u'_2, u'_3$  e  $u'_4, u'_5, u'_6$  os deslocamentos nos nós  $j$  e  $k$ , respetivamente. Equivalentemente, tem-se na figura 15b o mesmo elemento e os respetivos deslocamentos, mas agora representados no sistema de eixos globais.

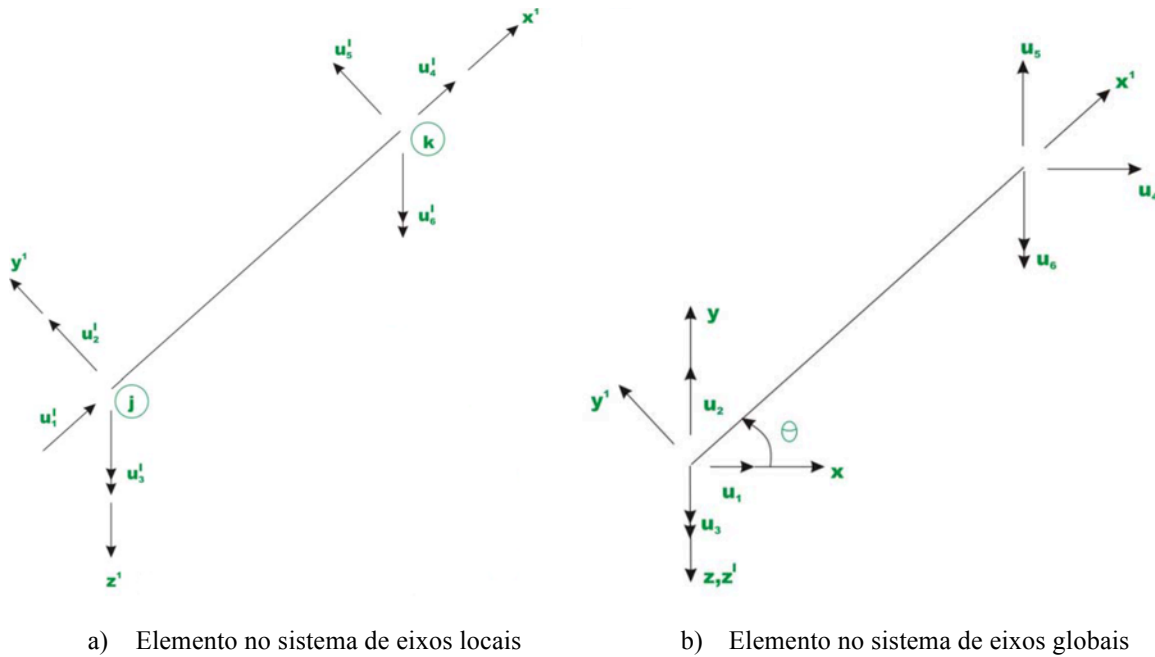


Figura 15 - Representação do elemento e os seus respetivos deslocamentos nos diferentes sistemas de eixos.

Considere-se  $\theta$  o ângulo que o elemento faz com o eixo  $x$ , no sistema de eixos globais. Desta forma, da análise dos esquemas presentes na figura 15, pode-se efetuar a relação entre  $u'_1, u'_2, u'_3$  e  $u_1, u_2, u_3$  da seguinte forma:

$$u'_1 = u_1 \cos\theta + u_2 \sin\theta \quad (16)$$

$$u'_2 = -u_1 \sin\theta + u_2 \cos\theta \quad (17)$$

$$u'_3 = u_3 \quad (18)$$

Ou de uma forma mais detalhada como mostra a expressão 19:

$$\begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \\ u'_5 \\ u'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & -m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & l & -m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Onde  $l = \cos\theta$  e  $m = \sin\theta$ . De uma forma mais sucinta tem-se:

$$\{u'\} = [T]\{u\} \quad (20)$$

Onde  $[T]$  representa a matriz de transformação, que converte os seis elementos do vetor de deslocamentos globais num vetor de deslocamentos com os seis elementos no sistema de eixos locais. Admitindo que as coordenadas dos nós  $j$  e  $k$  são  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , respetivamente, tem-se:

$$l = \cos\theta = \frac{x_2 - x_1}{L} \text{ e } m = \sin\theta = \frac{y_2 - y_1}{L} \quad (21)$$

Onde  $L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .

Da mesma forma, pode-se realizar este processo para as forças nos elementos. Considere-se o mesmo elemento, referido anteriormente, onde  $q'_1, q'_2, q'_3$  e  $q'_4, q'_5, q'_6$  são as forças nos nós  $j$  e  $k$ , respetivamente, no sistema de eixos locais, como mostra a figura 16a, e  $p_1, p_2, p_3$  e  $p_4, p_5, p_6$  as mesmas forças representadas no sistema de eixos globais, de acordo com a figura 16b.

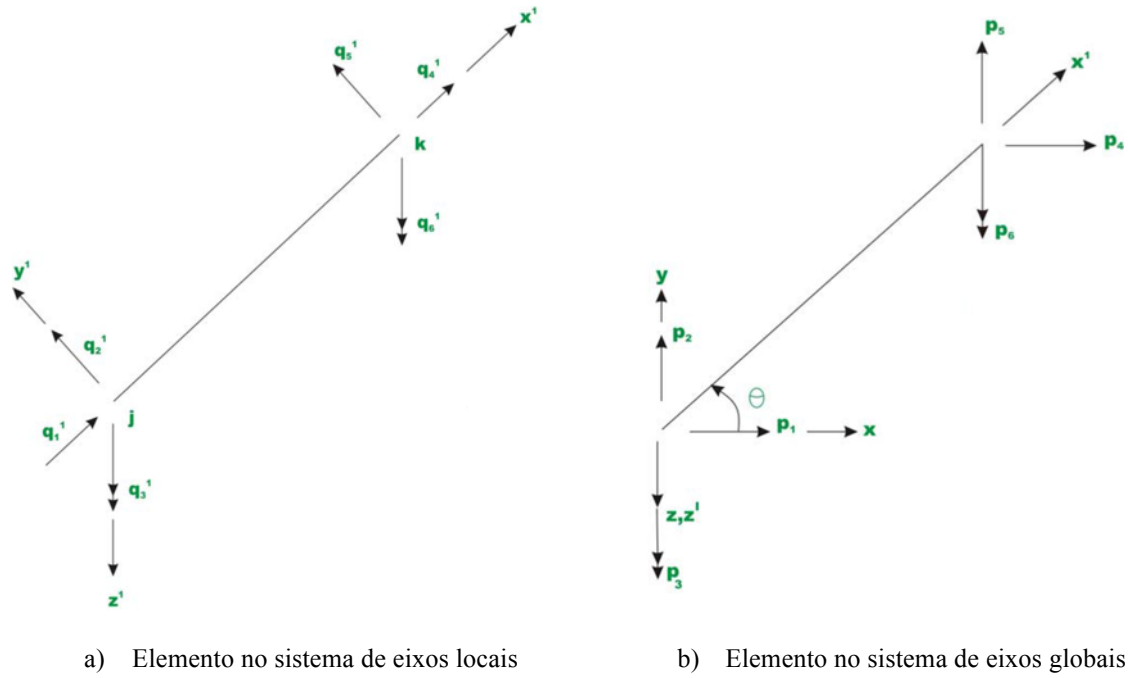


Figura 16 - Representação do elemento e as suas respetivas forças nos diferentes sistemas de eixos.

Através da expressão 22, recorrendo à mesma metodologia de conversão usada para os deslocamentos, obtém-se o vetor das forças  $\{p\}$  no sistema de eixo globais, como mostra a figura 16.

$$\{p\} = [T]^T \{q'\} \quad (22)$$

### 3.2.3 Matriz de rigidez do elemento nos eixos globais

Após os passos descritos, pode-se simplificar a expressão de construção da matriz de rigidez de um elemento da seguinte forma:

a) Da expressão 15 tem-se:

$$\{q'\} = [k']\{u'\}$$

b) Substituindo o valor de  $\{q'\}$  na expressão 15 tem-se:

$$\{p\} = [T]^T [k'] \{u'\} \quad (23)$$

c) Através do uso da expressão 20 obtém-se:

$$\{p\} = [T]^T [k'] [T] \{u\} \quad (24)$$

ou

$$\{p\} = [k] \{u\} \quad (25)$$

A expressão 25 representa a relação carga-deslocamento de um elemento no sistema de eixos global. Desta forma, tem-se que a matriz de rigidez de um elemento,  $[k]$ , é dada por:

$$[k] = [T]^T [k'] [T] \quad (26)$$

Ou de uma forma mais abrangente:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} \left( \frac{EA_x}{L} C_x^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_y^2 \right) & \left( \frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) C_x C_y & -\frac{6EI_z}{L^2} C_y & -\left( \frac{EA_x}{L} C_x^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_y^2 \right) & -\left( \frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) C_x C_y & -\frac{6EI_z}{L^2} C_y \\ \left( \frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) C_x C_y & \left( \frac{EA_x}{L} C_y^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_x^2 \right) & \frac{6EI_z}{L^2} C_x & -\left( \frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) C_x C_y & -\left( \frac{EA_x}{L} C_y^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_x^2 \right) & \frac{6EI_z}{L^2} C_x \\ -\frac{6EI_z}{L^2} C_y & \frac{6EI_z}{L^2} C_x & \frac{4EI_z}{L} & \frac{6EI_z}{L^2} C_y & -\frac{6EI_z}{L^2} C_x & \frac{2EI_z}{L} \\ \hline -\left( \frac{EA_x}{L} C_x^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_y^2 \right) & -\left( \frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) C_x C_y & \frac{6EI_z}{L^2} C_y & \left( \frac{EA_x}{L} C_x^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_y^2 \right) & \left( \frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) C_x C_y & \frac{6EI_z}{L^2} C_y \\ -\left( \frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) C_x C_y & -\left( \frac{EA_x}{L} C_y^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_x^2 \right) & -\frac{6EI_z}{L^2} C_x & \left( \frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) C_x C_y & -\left( \frac{EA_x}{L} C_y^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_x^2 \right) & -\frac{6EI_z}{L^2} C_x \\ -\frac{6EI_z}{L^2} C_y & \frac{6EI_z}{L^2} C_x & \frac{2EI_z}{L} & \frac{6EI_z}{L^2} C_y & -\frac{6EI_z}{L^2} C_x & \frac{4EI_z}{L} \end{array} \right] \quad (27)$$

Onde  $C_x = l = \cos\theta$  e  $C_y = m = \sin\theta$ .

### 3.2.4 Matriz de rigidez global da estrutura

Após todas as transformações, a montagem da matriz de rigidez global é efetuada da mesma forma descrita para as vigas contínuas, de acordo com a equação de relação carga-deslocamento  $\{P\} = [K]\{u\}$ .



## Capítulo 4

---

# LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO





## 4. Linguagem de programação

### 4.1 Considerações gerais

O *software* STAY2D foi desenvolvido, exclusivamente, para o sistema operativo *Windows*, através do ambiente de desenvolvimento integrado (IDE – *integrated development environment*) da Microsoft, com suporte para a plataforma .NET (.NET *framework*) – *Microsoft Visual Studio 2013*. Esta ferramenta engloba linguagens de programação como por exemplo *C*, *C++*, *C#*, *Python*, *Pascal*, *Visual Basic*, entre outras, sendo a linguagem de programação utilizada na conceção desta ferramenta o VB.NET. Esta linguagem está orientada a objetos (POO – programação orientada a objetos).

A plataforma .NET (ou simplesmente .NET) é uma tecnologia que suporta a criação e funcionamento das aplicações, nos dias de hoje, sendo esta destinada a cumprir os seguintes objetivos (Vinevala, 2011):

- fornecer um ambiente de programação consistente com a abordagem *object-oriented* (POO);
- minimizar os conflitos de distribuição e versão de *software*;
- garantir a execução segura do código, incluindo código criado por terceiros;
- eliminar problemas de desempenho de ambientes interpretados ou de *scripts*;
- garantir ao utilizador uma experiência consistente em diferentes tipos de aplicações, sejam elas baseados em *Windows* ou em *Web*;
- garantir que a comunicação de código baseado nesta plataforma consiga interagir com outro tipo de código.

### 4.2 Programação orientada a objetos

De acordo com Watson *et al.* (2010), POO é uma abordagem relativamente recente para criação de aplicações, que visa a resolução de vários problemas relacionados com técnicas de programação tradicionais. O tipo de programação intitulado funcional (ou processual) é o antecessor a este método de programação, resultando daí as chamadas aplicações monolíticas. Entenda-se por aplicações monolíticas aquelas onde todas as suas funcionalidades estão reunidas em poucos módulos de código, sendo a maior parte das vezes em apenas um. Deste modo, visto que as técnicas de POO usam mais módulos de código, permitindo que cada um deles tenha funcionalidades específicas e podem ser

isolados ou até mesmo independentes uns dos outros, faz com que este método de programação seja bastante versátil e permita reutilização de código.

No caso de uma aplicação mais tradicional o fluxo de execução de código é maioritariamente simples e linear, contrariamente à POO onde raramente as funcionalidades são lineares.

Para uma melhor compreensão do funcionamento de uma aplicação criada a partir das técnicas de POO, usaremos uma analogia entre esta e um motor de um automóvel. Sendo do conhecimento geral um motor possui várias partes fulcrais para o seu funcionamento. Numa perspectiva monolítica, o motor é constituído por um simples componente/objeto na sua totalidade, sendo que se desejar fazer uma reparação, atualização ou substituição seria necessário substituir todo o componente com recurso a mão de obra especializada ou simplesmente comprar um motor novo. Numa perspectiva de POO basta comprar a parte necessária para tal e seguir as instruções fornecidas juntamente com o produto, sem intervir na globalidade do motor, proporcionando uma maior eficácia e facilidade na operação. Desta forma surge a questão do que realmente é um objeto. Um objeto pode ser considerado uma das diversas partes constituintes de um programa, onde está armazenada informação que pode ser um processo, uma porção de dados, ou alguma entidade mais abstrata. De uma forma simplificada, um objeto pode ser muito similar a uma estrutura que contém membros do tipo variável e função. As variáveis consistem nos dados armazenados no objeto, enquanto que as funções permitem a obtenção destes dados e por conseguinte a funcionalidade do objeto (Watson *et al.*, 2010).

Segundo Lassala (2015), os alicerces da POO assentam em quatro conceitos básicos, seguidamente apresentados, sendo que qualquer linguagem orientada a objetos deve garantir suporte a estes.

#### **4.2.1 Abstração**

Entenda-se por abstração a capacidade de representar cenários complexos, recorrendo a termos simplificados. De maneira a ilustrar este conceito pode-se utilizar o exemplo anteriormente referido, sendo neste caso o objeto em estudo o carro. Um carro é uma abstração de um veículo, onde este pode ser usado, por uma pessoa, para se deslocar entre dois pontos. No quotidiano, ninguém diz: “Vou abrir a porta daquele veículo, movido a combustível, entrar, sentar-me, levar a chave à ignição, usar a embraiagem, engatar a primeira mudança, destravar o veículo, acelerar e controlar a trajetória com o volante”. Esta descrição não é necessária, partindo do pressuposto que o conceito abstraído para algo

que se conhece como “carro”. Neste caso uma explicação como “vou usar o meu carro para me deslocar até ao trabalho amanhã.” é suficiente. Num exemplo de programa, seria da mesma forma confuso se alguém dissesse: “Quando inicio certo programa no meu computador, ele abre uma janela repleta de caixas, brancas e retangulares, para inserir texto, sendo que algumas estão vazias e outras já contêm texto”. Desta forma, seria suficiente dizer que “O programa tem uma janela repleta de *textboxes*”. Se pensarmos numa caixa de texto e em todos os seus atributos (cor, tamanho, localização, texto, etc.), tal como nas ações que lhe são imputadas, esta foi abstraída para a palavra “*textbox*”. Posto isto, é importante compreender a diferença entre classe e objeto, sendo que quando é mencionado que algo complexo é abstraído em algo conhecido, como *textbox*, este é uma classe.

#### **4.2.2 Classe**

Uma classe não é diretamente utilizada, resumindo-se a um conjunto organizado de código que possui métodos (e.g. funções) e variáveis, servindo como base na criação de algo. Serve de exemplo o caso em que alguém pretende fazer um bolo, necessitando para isso de uma receita. Analogamente, a receita é uma classe e o bolo é o objeto. Com isto, pretende-se salientar que uma classe serve somente para definir objetos, sendo estes os elementos efetivamente utilizados.

#### **4.2.3 Encapsulamento**

Encapsulamento pode ser definido como a tarefa que torna um objeto o mais autónomo possível. Repescando o exemplo da caixa de texto numa janela de um programa, pode-se analisar os diversos detalhes que estão encapsulados no interior deste objeto. Veja-se, a título de exemplo, que o programador não necessita de conhecer ao certo de que forma o sistema operativo irá proceder à representação visual daquele objeto na referida janela, enviando por sua vez sinais do CPU (*Central Processing Unit*) para a placa gráfica, seguidamente para o monitor e posteriormente criar o objeto na posição previamente especificada. Felizmente, o programador não tem necessidade de se preocupar com este tipo de detalhe, sendo que para tal apenas é necessário colocar a caixa de texto no local pretendido e configurar as propriedades pretendidas, uma vez que o objeto é suficientemente autónomo para realizar tal operação sozinho. Posto isto, interessa referir que os conceitos de abstração e encapsulamento estão interligados, uma vez que a

abstração define a entidade que representa um objeto complexo, e o encapsulamento oculta os detalhes desse objeto.

#### 4.2.4 Herança

No que diz respeito à herança, esta pode ser definida como a capacidade de uma classe herdar atributos e comportamento de outra classe. Retomando o exemplo do carro, existem variadíssimas marcas, tipos e modelos deste. Desta forma, cada vez que se cria um novo carro não é, de todo, necessário reinventar a roda, uma vez que determinados conceitos abstraídos e encapsulados referentes ao objeto “carro” já foram planeados, testados e aprovados, não sendo necessário despender mais tempo e recursos nestes.

#### 4.2.5 Polimorfismo

Polimorfismo, originário do grego, significa “muitas formas”. No que diz respeito ao mundo da programação, este conceito é definido como a capacidade de objetos diferentes possuírem métodos com o mesmo nome e lista de parâmetros. De forma a ilustrar melhor este conceito, é do conhecimento geral que todos os veículos possuem um meio para acelerar, independentemente do mecanismo para tal usado (pedais, motor, etc.). Da mesma forma, pode-se dizer que objetos diferentes como um carro, uma bicicleta ou uma motorizada, derivam todos da mesma classe, neste caso a classe veículo. Tirando partido do polimorfismo, visto que a classe veículo possui um método denominado “acelerar”, pode-se invocar um método do mesmo nome, sendo que este possui um comportamento diferente para cada um dos objetos.

### 4.3 Características da linguagem

Entre 1991 e 1998, a Microsoft lançou seis versões do *Visual Basic*, desde a versão 1.0 até à 6.0, revolucionando o desenvolvimento de *software* para Windows através da introdução da programação orientada a eventos. Após um período significativo de inovação e desenvolvimento, a Microsoft lançou o VB.NET 2002, sendo uma linguagem de POO bastante semelhante ao *Visual Basic* mas implementada na plataforma Microsoft .NET *framework*. O VB.NET está tão integrado com o Microsoft Visual Studio, que nos dias de hoje só está disponível como componente deste (Halvorson, 2010).

Esta linguagem utiliza uma sintaxe clara, compreensiva e objetiva, para explicação de algumas tarefas mais complexas. Com esta linguagem é possível criar soluções que são executadas em sistemas operativos Microsoft Windows, como por exemplo Windows 8,

Windows 10, Windows Phone, entre outras. Também pode ser usada na criação de aplicações *web* e serviços *web*, tal como em aplicações para dispositivos móveis, nomeadamente *tablet PC's* e *smartphones* (Newsome, 2012)

Em suma, utilizou-se esta linguagem de programação na conceção do *software* STAY2D, pelos motivos anteriormente referidos e por ser uma linguagem intuitiva e organizada, que possui como base técnicas de POO.



## Capítulo 5

---

### PROGRAMA STAY2D





## 5. Programa STAY2D

No presente capítulo procede-se à apresentação do programa STAY2D, no que diz respeito à organização do seu algoritmo, ao seu ambiente gráfico e às suas diversas funcionalidades. Uma análise mais detalhada, acerca do modo de utilização do programa, está descrita nos manuais de utilizador, em português e inglês, integrantes do programa. Interessa referir que o desenvolvimento deste *software* inspirou-se em programas como Ftool, SeismoStruct, Linpro, Plane Frame Analyzer, SAP2000, entre outros.

### 5.1 Organização do algoritmo

O algoritmo do programa STAY2D é constituído por um conjunto de classes definidas por subrotinas e funções que servem de base às diversas ferramentas de desenho e cálculo. A tabela 1 apresenta as referidas classes, bem como o número de linhas que as constituem e uma breve descrição.

Tabela 1 - Classes que constituem o *software* STAY2D

<i>Classes</i>	<i>N.º de linhas</i>	<i>Descrição</i>
EcrãInicial	112	Janela inicial do programa, incluindo opções como créditos, termos e condições e linguagem.
Main	977	Definição da janela principal e organização de todas as subjanelas, como a área de desenho, área de resultados, janela de condições de apoio, entre outras.
EfeitoBtnSelecao	17	Design dos botões seleccionados na barra de ferramentas.
NovaAplicacao	109	Criação de um novo projeto.
AreaTrabalho	1065	Área de desenho da estrutura.
Desenhar	487	Criação de elementos lineares (linhas).
LinhasAuxili	146	Desenho de linhas auxiliares horizontais e verticais.
PintarTemporariamente	345	Responsável pela execução de comandos como <i>pan</i> e seleccionar, e pelo desenho das figuras de <i>snap</i> em pontos médios, de intersecção e pontos finais dos elementos lineares na área de desenho.

PintarPermanente	173	Fixação dos elementos lineares na área de desenho após a definição das duas extremidades.
JanelaMateriais	202	Definição dos materiais dos elementos constituintes da estrutura.
JanelaCondicoesApoio	1254	Introdução de condições de apoio na estrutura.
PintarApoios	145	Design dos apoios dos elementos lineares.
JanelaCargas	1312	Introdução de esforços na estrutura (cargas concentradas e distribuídas)
PropElementos	792	Armazenamento das propriedades dos elementos lineares, como inclinação, comprimento, inércia, entre outras.
Historico	55	Armazenamento de todas as operações efetuadas, caso seja necessário retroceder, refazer ou salvar.
Indexes	77	Estabelecer ligação entre a área de desenho e a área de resultados.
CalculoEstrutural	2737	Cálculo inerente à análise estrutural.
JanelaAnalise	16	Verificação do estado do processo de cálculo efetuado, incluindo a apresentação da mensagem de sucesso ou erro na análise.
AreaResultados	253	Desenhar todos os resultados.
PintarMembrosFundo	79	Desenho de todos os elementos estruturais na área de resultados (apoios e elementos lineares).
PintarResultadaos	255	Desenho de reações de apoio, diagramas de esforços e configuração deformada.
PintarResultTempo	112	Responsável por executar o comando <i>pan</i> na área de resultados.
Relatorio_PDF	528	Criação do relatório da análise efetuada, em PDF.

## 5.2 Apresentação do programa

Na iniciação do STAY2D, surge uma janela de boas vindas (figura 17) que tem por objetivo fornecer algumas informações iniciais e essenciais acerca do programa, tais como:

- Informações relativas ao programa;
- Termos e condições;
- Seleção do idioma (Português e Inglês).



Figura 17 - Janela inicial.

Após o término da janela de boas vindas, surge a janela principal do programa (figura 18) constituída por três campos distintos, sendo eles:

- Barra de ferramentas (figura 18 – a);
- Área de criação e manipulação do modelo estrutural (figura 18 – b);
- Barra inferior (figura 18 – c).

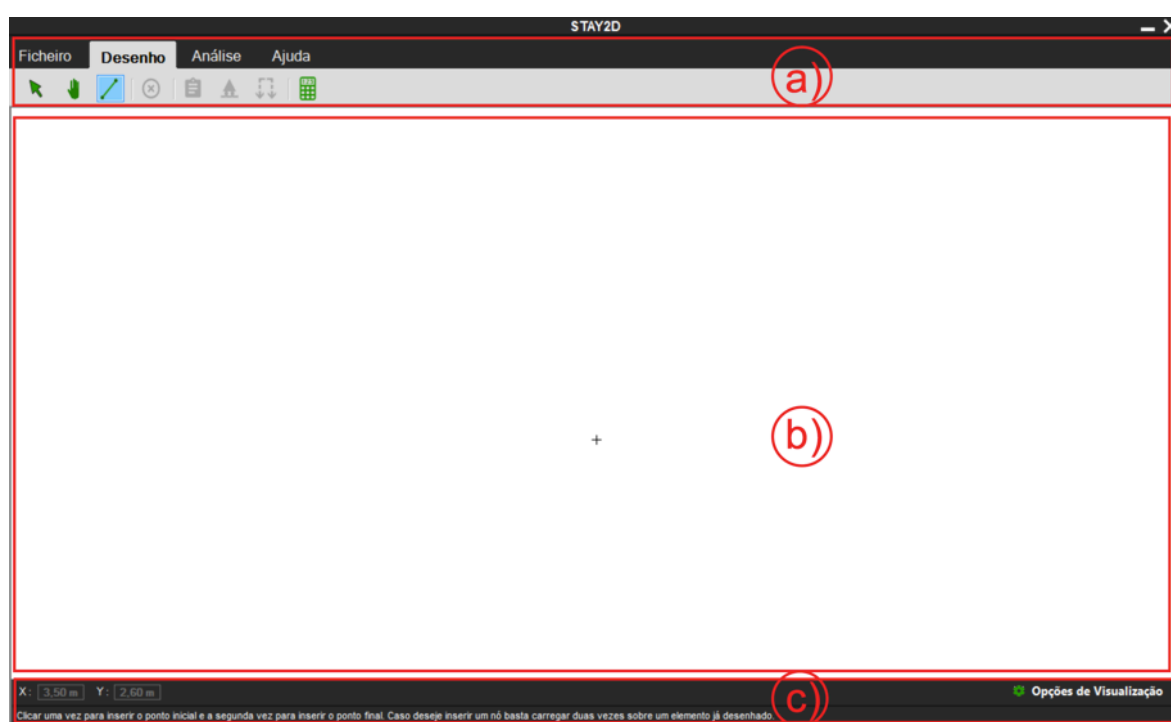









Figura 18 - Janela principal.

Interessa referir que é aconselhável uma leitura prévia do manual de utilizador, em Português ou Inglês, e/ou do tutorial em vídeo, de forma a garantir uma melhor utilização do programa STAY2D, presentes no separador “Ajuda”.

Como mostra a figura 18 – a), a barra de ferramentas é composta por 4 separadores, contendo cada uma delas as seguintes ferramentas:

a) Ficheiro








Neste separador constam ferramentas comuns a todos os programas, tais como:

-  - inicia um novo projeto (Ctrl+N);
-  - abre um projeto previamente guardado (Ctrl+O);
-  - guarda o projeto atual (Ctrl+S);
-  - fecha o programa;
-  - retroceder (Ctrl+Z);
-  - refazer (Ctrl+R).
-  - Ecrã inicial (Ctrl+H)

b) Desenho




No separador “Desenho” estão presentes as ferramentas necessárias para a criação e manipulação do modelo estrutural, sendo estas:

-  - ferramenta de seleção (Ctrl+M);

-  - move a imagem (Pan) (F2);
-  - desenhar elementos(Ctrl+L);
-  - delete (Del);
-  - propriedades dos elementos(Ctrl+E);
-  - condições de apoio (Ctrl+A);
-  - cargas (Ctrl+C);
-  - calculadora (F1);




#### c) Análise

Neste separador o utilizador dispõe de ferramentas que lhe permite efetuar e visualizar os resultados obtidos da análise estrutural, sendo elas:

-  - resolver/analisar (Ctrl+ENTER);
-  - voltar ao modo de desenho (Ctrl+D);
- **R** - Reações de Apoio;
- **N** - diagrama de Esforço Axial;
- **V** - diagrama de Esforço Transverso;
- **M** - diagrama de Momento Fletor;
- **D** - Deformada da Estrutura;
-  - Relatório da Análise (Ctrl+P).

#### d) Ajuda

Por último, o separador “Ajuda” fornece ferramentas de auxílio ao utilizador, de maneira a facilitar a sua interação com este *software*, sendo elas:

-  - manuais de utilização;
-  - tutorial em vídeo;
-  - termos e condições;
- **i** - acerca do STAY2D

Por sua vez, a barra inferior, como mostra a figura 18 – c), contém três campos que auxiliam a visualização e funcionamento do programa, sendo eles:

#### e) Posição do rato

Este campo (figura 19) permite ao utilizador perceber, a nível de coordenadas reais, qual a posição do rato relativamente ao sistema de coordenadas cartesianas.

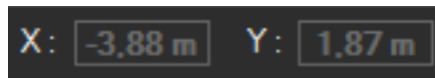


Figura 19 - Posição do rato.

f) Caixa de opções de visualização

Esta opção (figura 20) permite ao utilizador ligar ou desligar funcionalidades de visualização da componente gráfica do *software*, tais como:

- Numeração Nós;
- Comprimento;
- Comprimento tempo real;
- Linhas ortogonais;
- Comp/Ângulo cursor;
- Ângulos entre elementos.

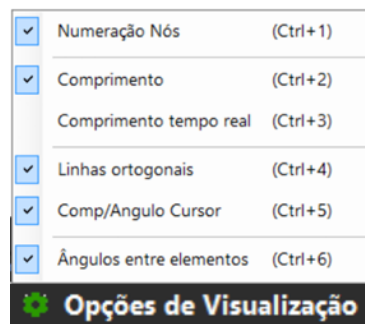


Figura 20 - Caixa opções de visualização.

g) Barra com dicas de ajuda

Nesta barra (figura 21) são fornecidas algumas dicas ao utilizador, no que diz respeito ao uso de certas ferramentas, com o intuito de melhorar a sua experiência no programa.

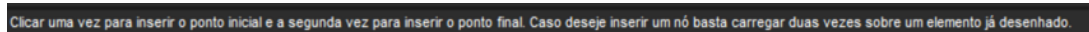


Figura 21 - Barra com dicas de ajuda.

Seguidamente, procede-se à descrição sucinta das várias funcionalidades do programa de forma a demonstrar os conteúdos integrantes deste.

### 5.3 Funcionalidades

Após a inicialização do programa e consequente seleção do idioma, o utilizador fica na presença do corpo principal do *software* (figura 18), como descrito anteriormente. A figura 22 indica o processo sucinto de funcionamento do programa para criação, manipulação e análise de um problema estrutural.

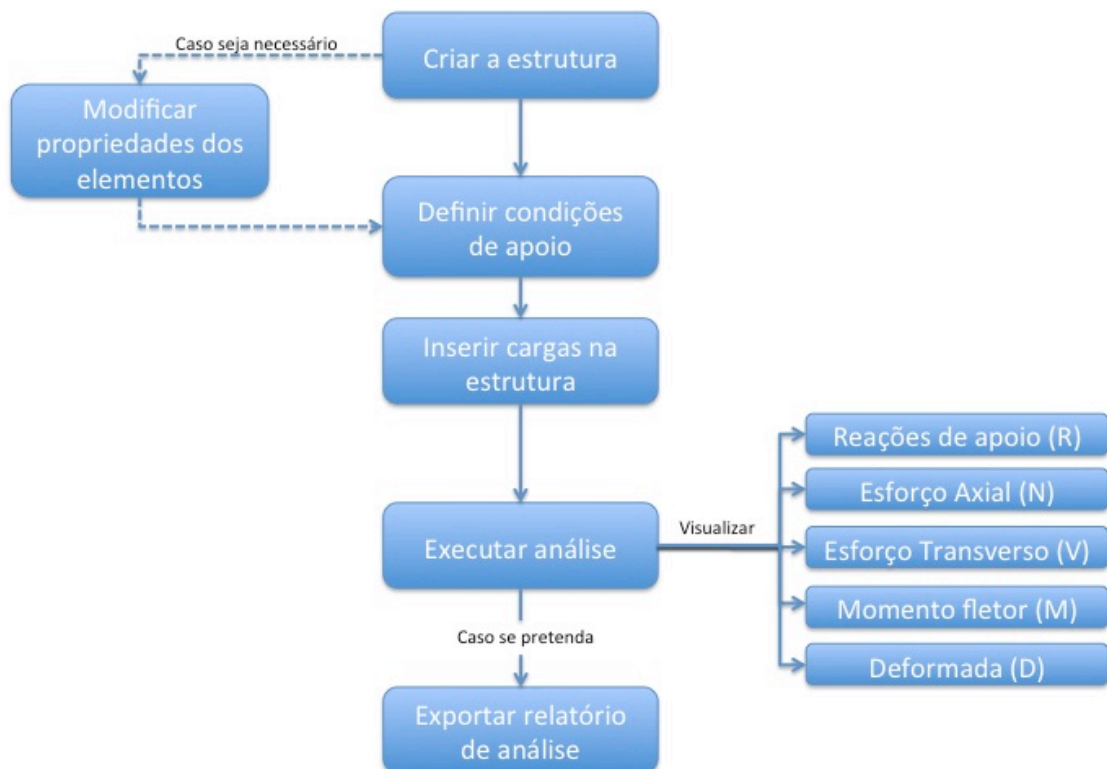



Figura 22 - Fluxograma de funcionamento do programa STAY2D.

Seguidamente, procede-se à descrição das funcionalidades enunciadas na figura 22.

#### 5.3.1 Criar a estrutura

Será na área de criação e manipulação do modelo estrutural que o utilizador irá criar a estrutura pretendida. Como ponto de partida, o utilizador criará a estrutura recorrendo à ferramenta , desenhando os elementos constituintes desta (figura 23).

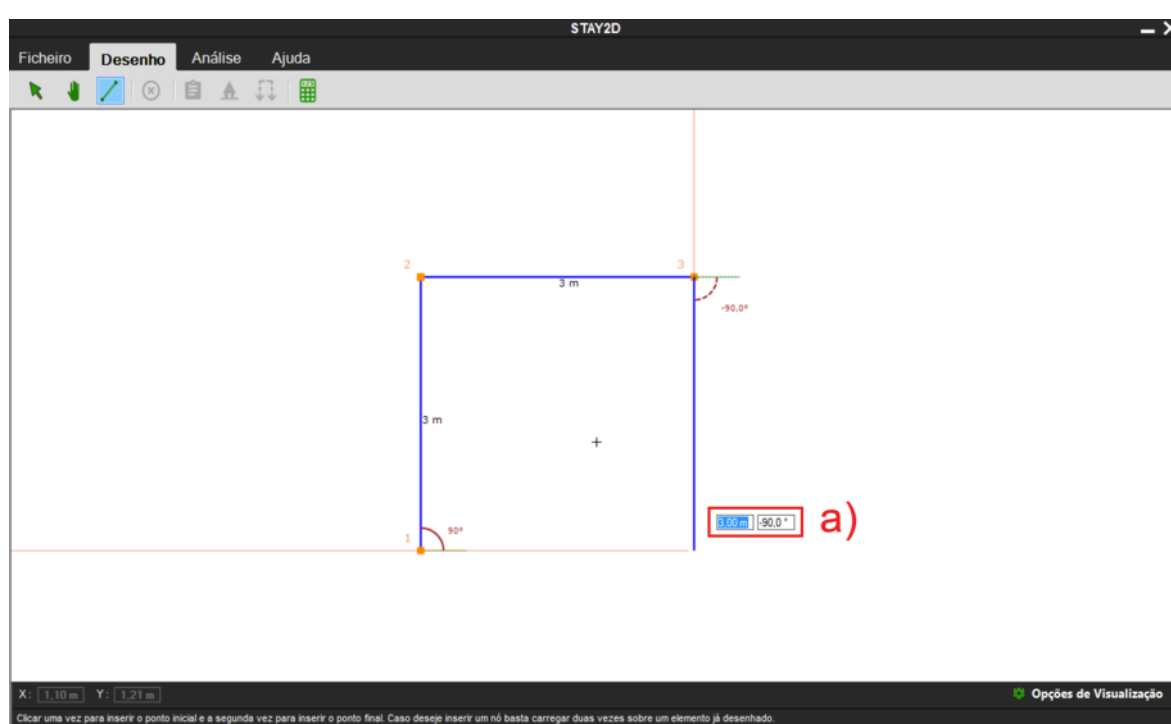


Figura 23 - Janela principal com estrutura em desenvolvimento.

Interessa salientar que o utilizador pode introduzir manualmente o comprimento e o ângulo do elemento em tempo real, através do campo a) da figura 23, de forma a facilitar o processo de criação da estrutura.

### 5.3.2 Modificar propriedades dos elementos

Uma vez que, ao ser desenhado um elemento este já possui propriedades padrão sendo a área da secção transversal ( $A$ ) igual a  $0,12 \text{ m}^2$ , o momento de inércia ( $I$ ) de  $0,0016 \text{ m}^4$  e um módulo de elasticidade ( $E$ ) de  $30 \text{ GPa}$ , não se torna necessário a atribuição destas cada vez que se cria um novo elemento. Não obstante, caso seja necessário o utilizador definir diferentes valores para essas propriedades pode efetuá-las através do painel de propriedades dos elementos (figura 24).



Comprimento (m)	A (m²)	E (Pa)	I (m⁴)
3	0.12	3E+07	0.0016
3	0.12	3E+07	0.0016
3	0.12	3E+07	0.0016

**Modificar**

Área (A) e Inércia (I) da Secção Transversal do Elemento

A = 120000 mm²      I = 159999960 mm⁴


Módulo de Elasticidade (E)

E = 30000 MPa

**Modificar**

**Fechar**

Figura 24 - Painel propriedade dos elementos.

Este painel só poderá ser acedido após um elemento estar seleccionado, para tal recorre-se à ferramenta .

### 5.3.3 Definir condições de apoio

No painel das condições de apoio, como mostra a figura 25, o utilizador escolhe o nó onde quer inserir o apoio (figura 25 – a), o tipo de apoio que pretende imputar na estrutura (figura 25 – b) e o seu respetivo ângulo (figura 25 – c). Caso seja necessário, também é possível a imposição de assentamentos de apoio (figura 25 – d).

Nó 1      Nó 2      a)

1

90°

**Tipos de Apoio**

☐ Rótula

☐ Nó sem apoios

☐ Apoio Simples

☐ Apoio Duplo

☒ Encastramento

☐ Slido

**Assentamentos de Apoio**

$\Delta x$  0 (mm)

$\Delta y$  0 (mm)

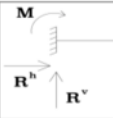

**Ângulo do Apoio**

90° ☒

Nota: Também se pode rodar o apoio, na imagem, para definir o ângulo.

**Descrição**

Um Encastramento restringe o movimento de translação do nó em qualquer direção tal como a rotação em torno do apoio.

**Fechar**

Figura 25 - Painel condições de apoio.

De forma a facilitar a compreensão por parte do utilizador, inseriu-se uma breve descrição acompanhada de algumas imagens referente a cada tipo de apoio.


### 5.3.4 Inserir cargas na estrutura

Neste painel (figura 26) o utilizador escolhe o tipo de carregamento que quer imputar à estrutura (figura 26 – a), a localização (figura 26 – b), direção (figura 26 – c) e valor (figura 26 – d) do mesmo.

The image shows a software interface for defining point loads. It features three tabs at the top: 'Cargas Pontuais' (highlighted in red), 'Cargas Distribuídas', and 'Momentos'. Below the tabs, there are four main sections: 'Localização da Carga Pontual' with a slider and a value of 1.94 m; 'Valor da Carga Pontual' with a text input field containing -15 kN; 'Direção da Carga Pontual' with radio buttons for 'Perpendicular ao Elemento', 'Vertical', and 'Horizontal' (selected); and a diagram showing a vertical blue line with a green arrow pointing left, labeled 15 and 3. At the bottom, there is a 'Fechar' button.

Figura 26 - Painel cargas.

### 5.3.5 Executar análise

Após a geometria e todas as condicionantes da estrutura estarem definidas (figura 27), o utilizador deve iniciar a análise através da ferramenta , ficando deste modo na presença da área de resultados (figura 28).

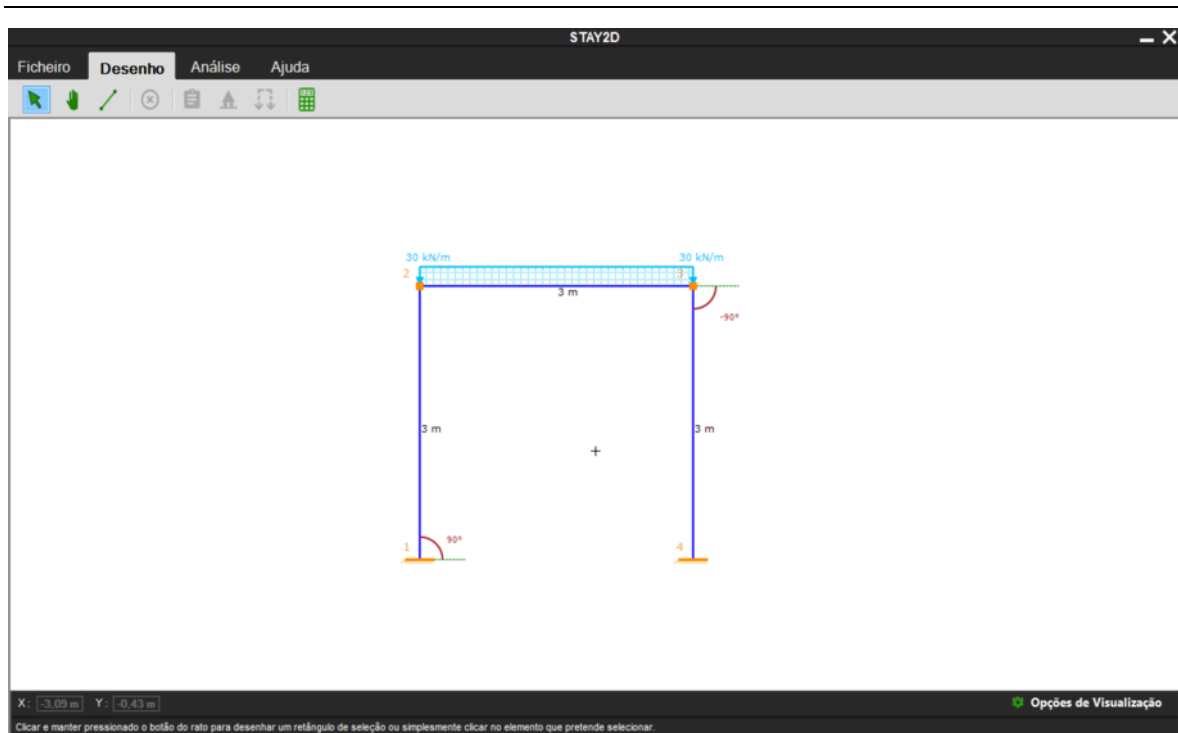


Figura 27 - Área de criação e manipulação do modelo com estrutura definida para análise.

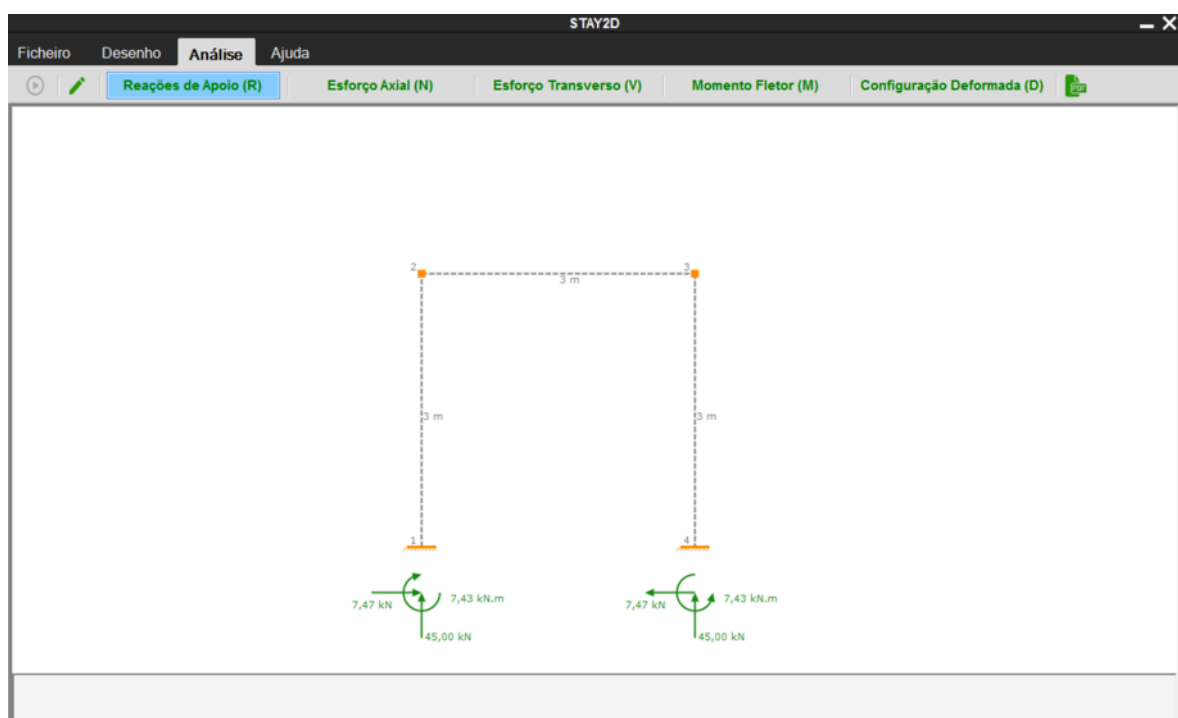



Figura 28 - Área de resultados na vista de reações de apoio.

Interessa referir que, caso o utilizador deseje efetuar algum tipo de modificação na estrutura, basta para isso clicar na ferramenta . Após conclusão das modificações, apenas é necessário iniciar, novamente, a análise para visualização dos novos resultados.

## 5.4 Resultados do programa

Uma vez concluída a análise, o utilizador pode visualizar os resultados da análise da estrutura efetuada, sendo eles:

- Reações de Apoio (R) – figura 28;
- Diagramas de esforço:
  - Axial (N) – figura 29;
  - Transverso (V) – figura 30;
  - Momento Fletor (M) – figura 31.
- Deformada da Estrutura (D) – figura 32.

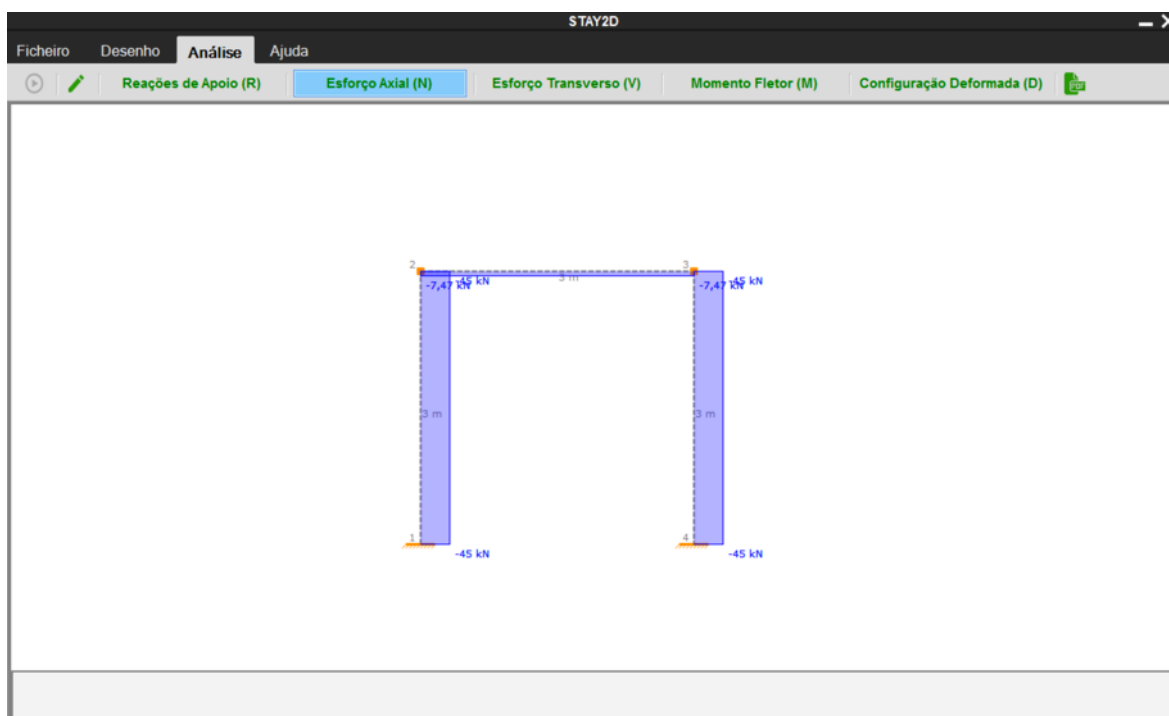


Figura 29 - Diagrama de esforço axial da estrutura.

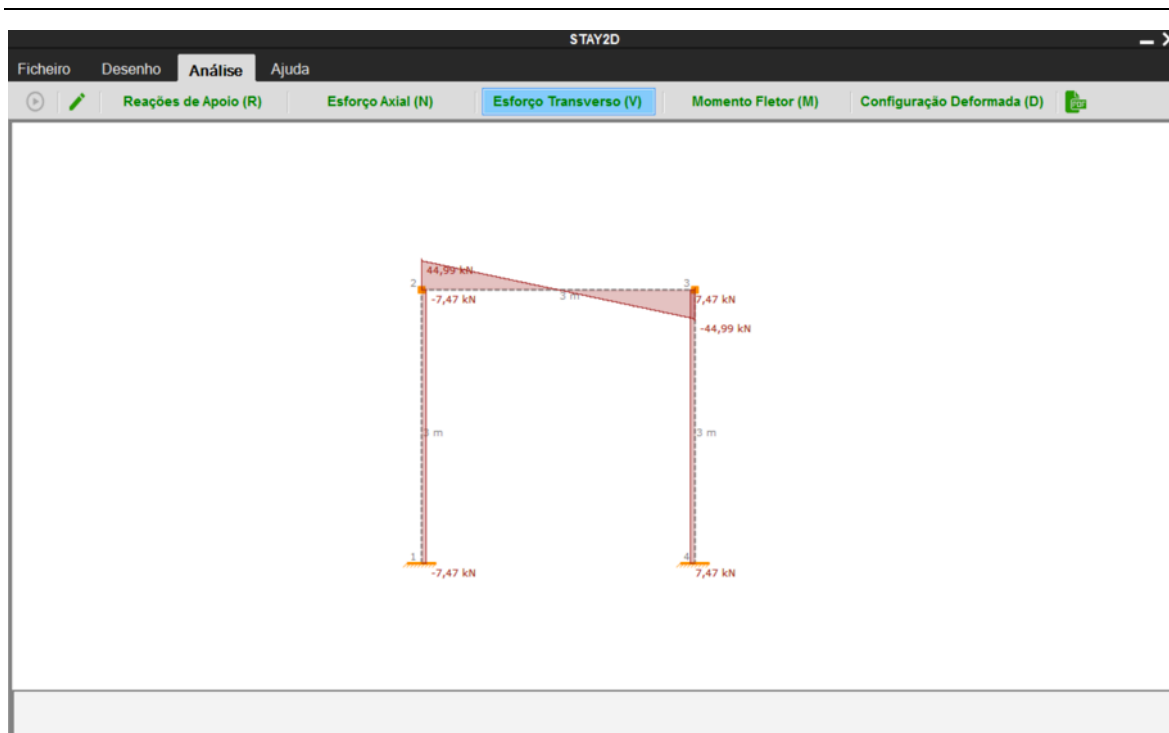


Figura 30 - Diagrama de esforço transverso da estrutura.



Figura 31 - Diagrama de momento fletor da estrutura.

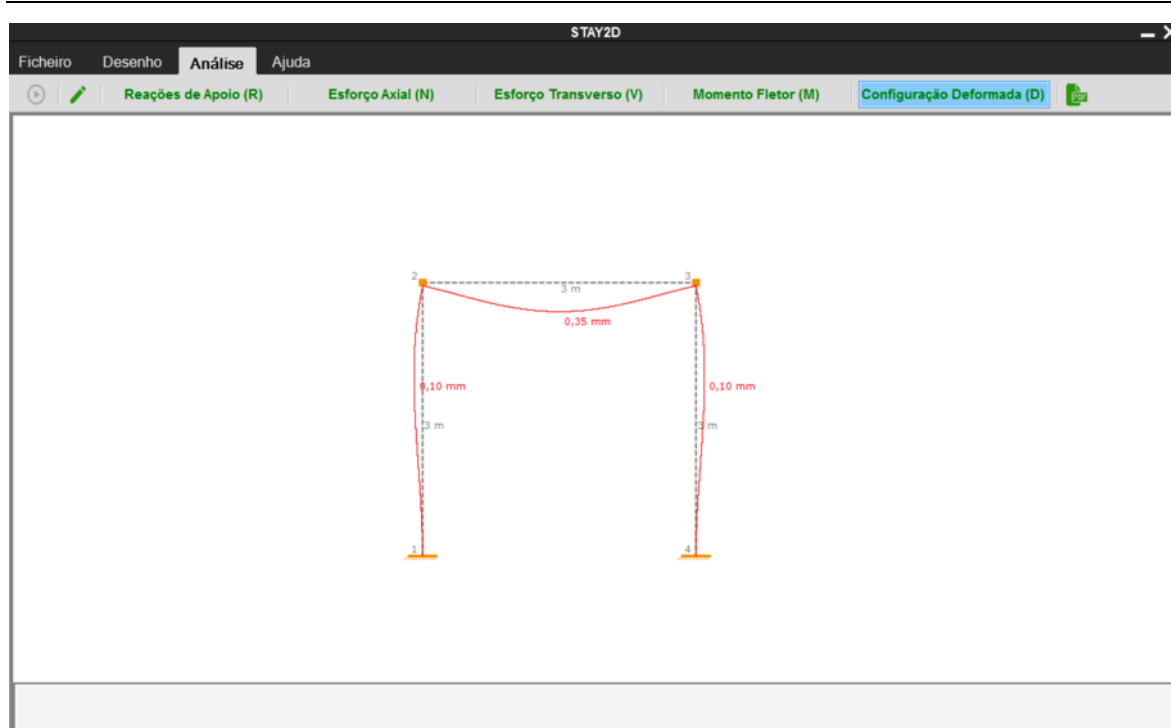

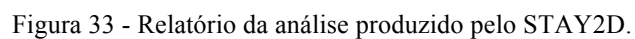


Figura 32 - Configuração deformada da estrutura.

Posteriormente, caso o utilizador pretenda exportar um relatório da análise em ficheiro PDF basta recorrer à ferramenta . Este é gerado automaticamente pelo programa STAY2D e estão contemplados os seguintes componentes:

- Reações de Apoio – figura 28;
- Diagramas de esforço:
  - Axial – figura 29;
  - Transverso – figura 30;
  - Momento Fletor – figura 31.
- Deformada da Estrutura – figura 32;
- Matriz de rigidez global da estrutura – figura 33.

A figura 33 mostra o exemplo de uma página integrante de um relatório da análise gerado automaticamente pelo *software*.







## **Capítulo 6**

---

# **EXEMPLOS PRÁTICOS E COMPARAÇÕES DE RESULTADOS**



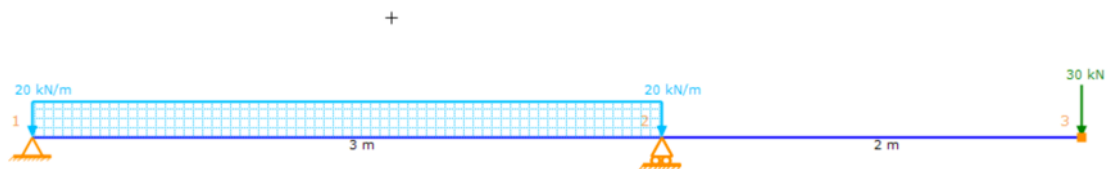
## 6. Exemplos práticos e comparações de resultados

De forma a garantir a validação por parte do programa STAY2D, procede-se à resolução e respetiva comparação de resultados deste com exemplos efetuados em outros programas de cálculo, nomeadamente o SAP2000 e o Ftool.

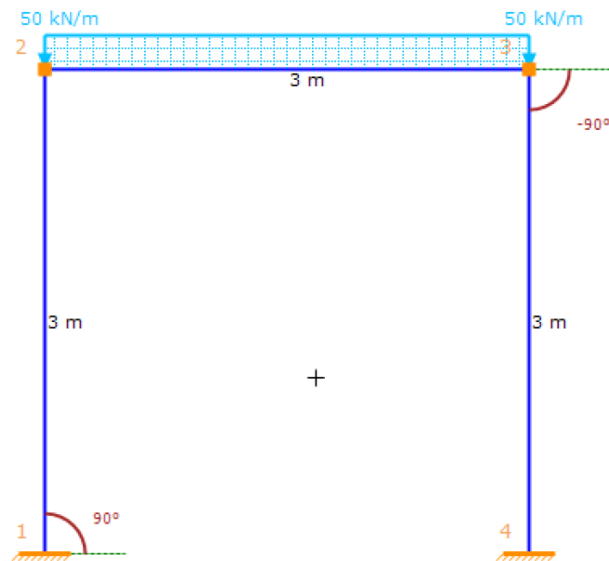
A comparação dos resultados entre os programas mencionados serão referentes a:

- Reações de Apoio;
- Esforço Axial;
- Esforço Transverso;
- Momento Fletor;
- Configuração Deformada;
- Deslocamentos.

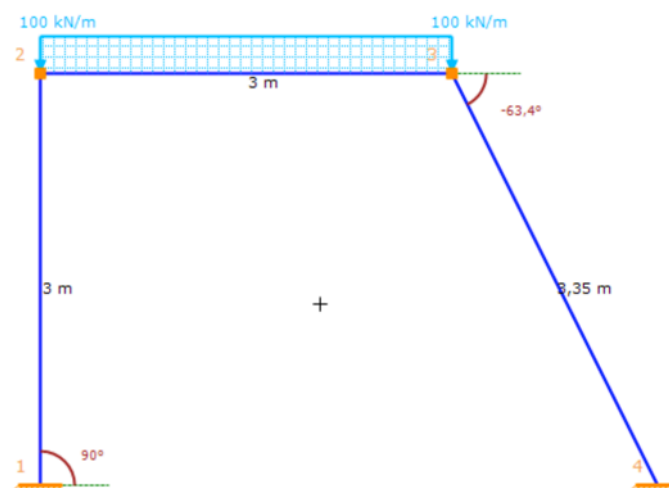
Na figura 34 estão representadas as estruturas que serão utilizadas para efeitos de comparação, sendo a primeira (figura 34a) uma viga simplesmente apoiada, a segunda (figura 34b) um pórtico plano e a terceira (figura 34c) um pórtico plano com um elemento inclinado.



a) Viga simplesmente apoiada



b) Pórtico plano



c) Pórtico plano com elemento inclinado

Figura 34 - Estruturas selecionadas para efeitos de comparação.

Seguidamente, analisa-se, individualmente, cada uma delas e observa-se os resultados obtidos em cada programa de cálculo, de forma a compreender se o *software* STAY2D garante fiabilidade perante os demais.

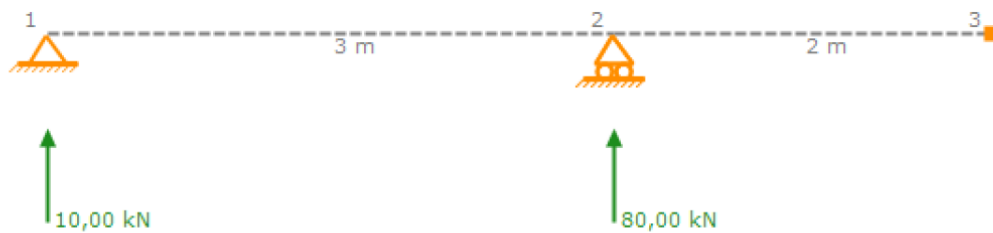
Interessa referir que, o material e a área da secção transversal dos elementos usada foi igual em todos os elementos, sendo:

- Área da secção transversal ( $A$ ) =  $0,12 \text{ m}^2$
- Momento de Inércia ( $I$ ) =  $0,0016 \text{ m}^4$
- Módulo de Elasticidade ( $E$ ) =  $30 \text{ GPa}$

## 6.1 Viga simplesmente apoiada

Nas figuras 35, 36, 37 e 38 estão representadas as reações de apoio, os diagramas de esforço transversal e momento fletor, e a configuração deformada, respetivamente, de uma viga simplesmente apoiada, segundo os programas de cálculo STAY2D, Ftool e SAP2000. Neste exercício desprezou-se os esforços axiais, sendo apenas comparados os esforços transversos, os momentos fletores e a configuração deformada.

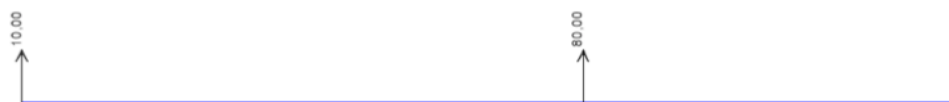
- **Reações de apoio:**



a) STAY2D



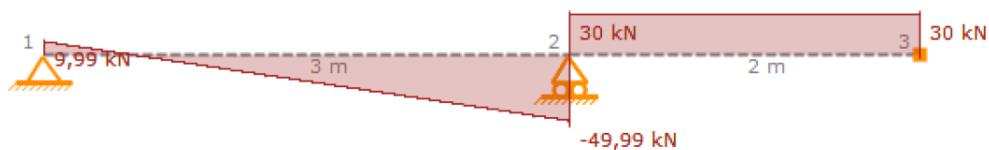
b) Ftool



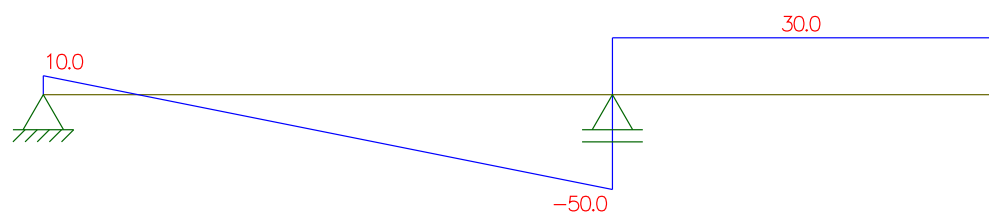
c) SAP2000

Figura 35 - Reações de apoio da viga simplesmente apoiada.

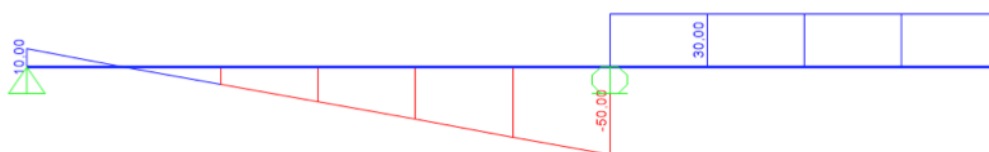
- **Esforço transverso:**



a) STAY2D



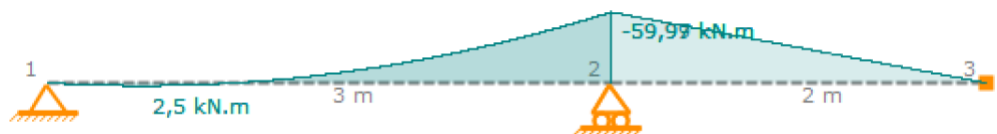
b) Ftool



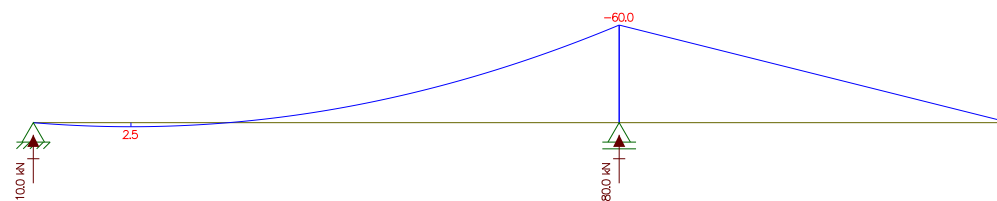
c) SAP2000

Figura 36 - Diagramas de esforço transverso da viga simplesmente apoiada.

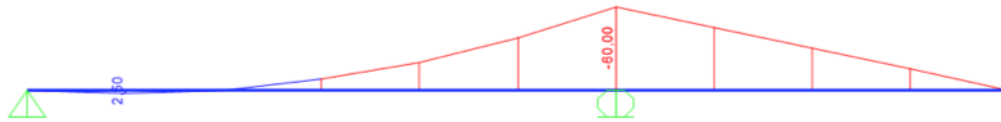
- **Momento fletor:**



a) STAY2D



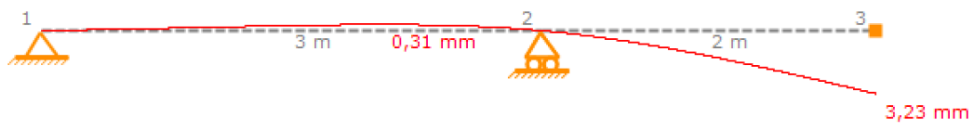
b) Ftool



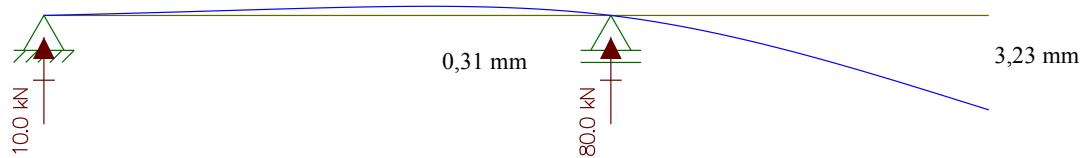
c) SAP2000

Figura 37 - Diagramas de momento fletor da viga simplesmente apoiada.

- Configuração deformada:**



a) STAY2D



b) Ftool



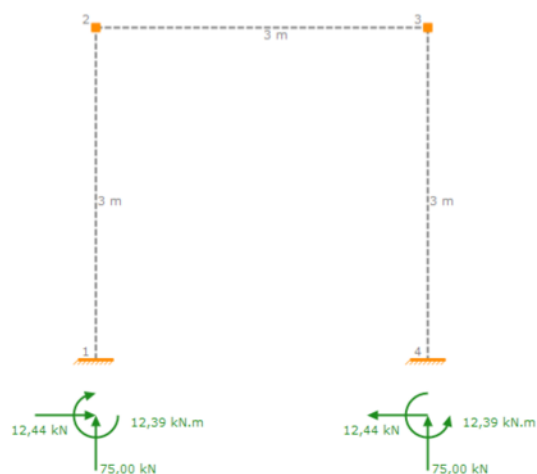
c) SAP2000

Figura 38 - Configurações deformadas da viga simplesmente apoiada.

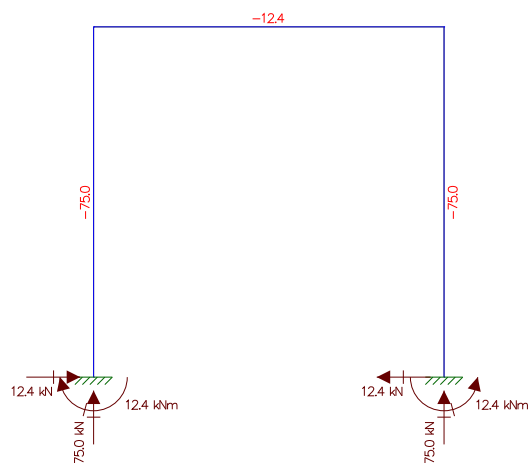
## 6.2 Pórtico plano

Da mesma forma, nas figuras 39, 40, 41, 42 e 43 estão representadas as reações de apoio, os diagramas de esforço axial, transversal e momento fletor, e a configuração deformada, respectivamente, sendo agora referentes a um pórtico plano, segundo os programas de cálculo STAY2D, Ftool e SAP2000.

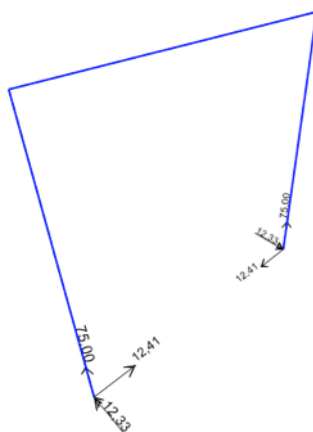
- **Reações de apoio:**



a) STAY2D



b) Ftool

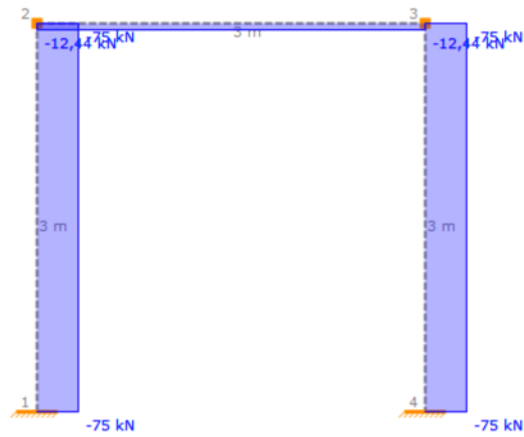


c) SAP2000

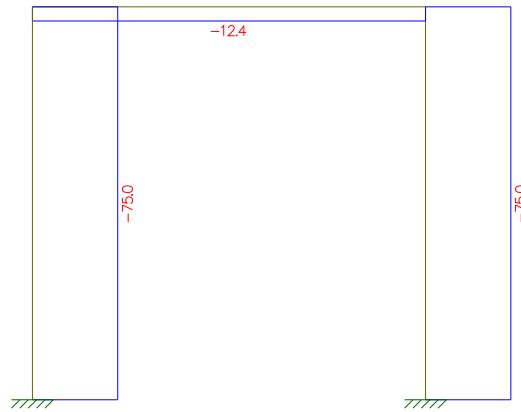
Figura 39 - Reações de apoio do pórtico plano.



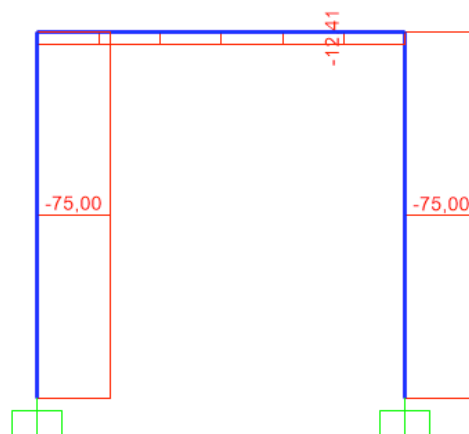
- Esforço axial:



a) STAY2D



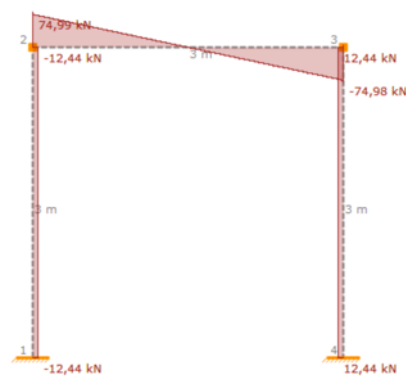
b) Ftool



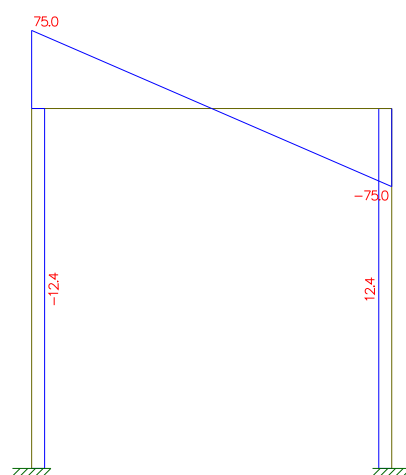
c) SAP2000

Figura 40 - Diagramas de esforço axial do pórtico plano.

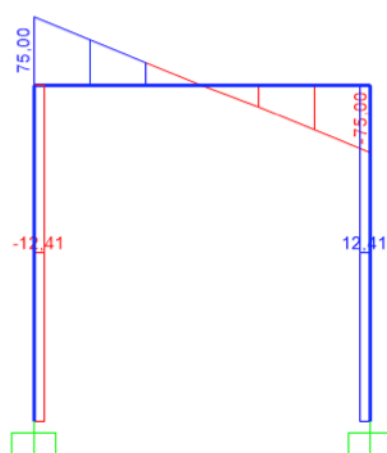
- **Esforço transversal:**



a) STAY2D



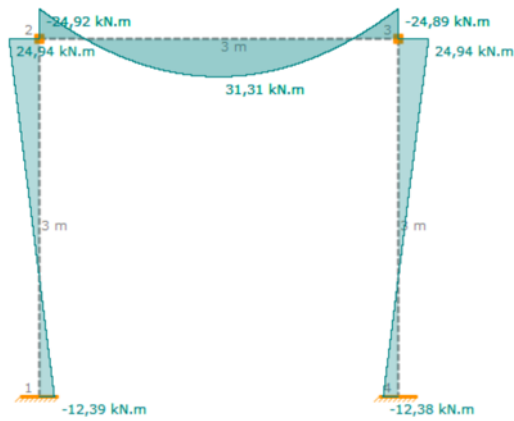
b) Ftool



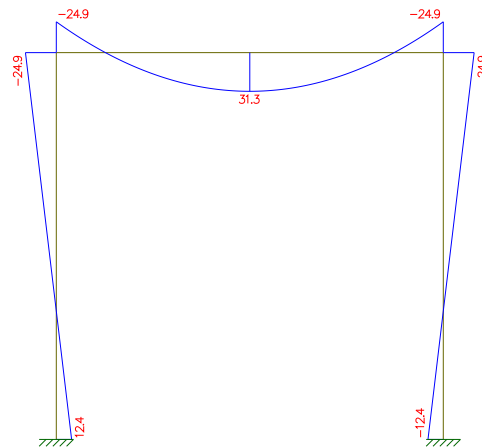
c) SAP2000

Figura 41 - Diagramas de esforço transversal do pórtico plano.

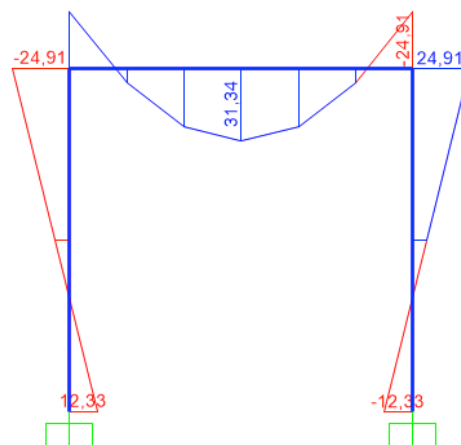
- Momento fletor:



a) STAY2D



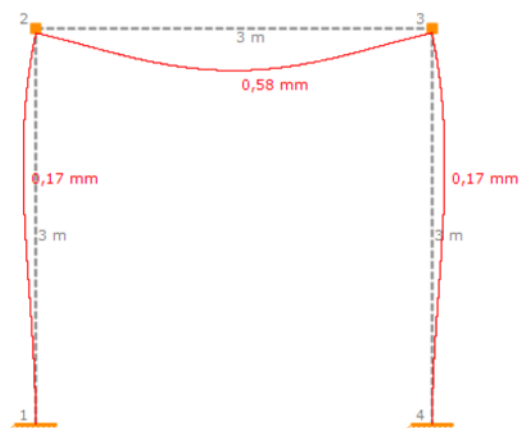
b) Ftool



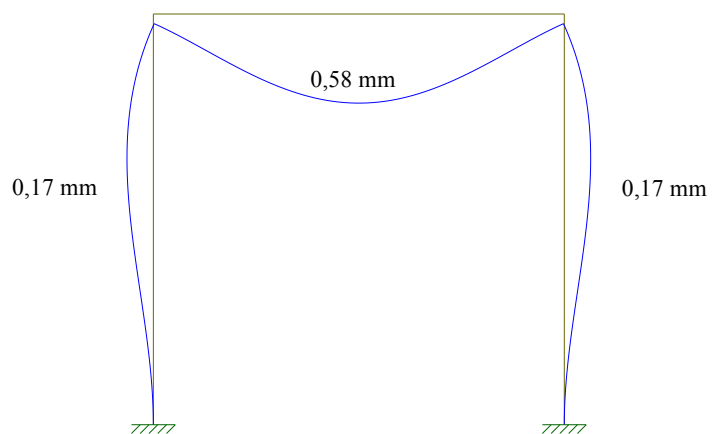
c) SAP2000

Figura 42 - Diagramas de momento fletor do pórtico plano.

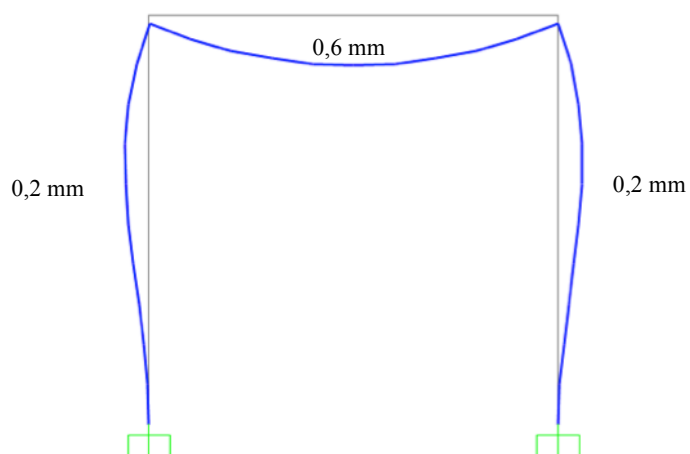
- **Configuração deformada:**



a) SATY2D



b) Ftool



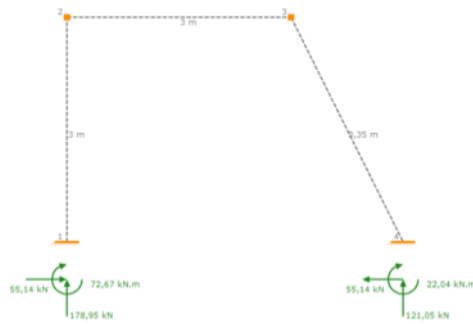
c) SAP2000

Figura 43 - Configurações deformadas do pórtico plano.

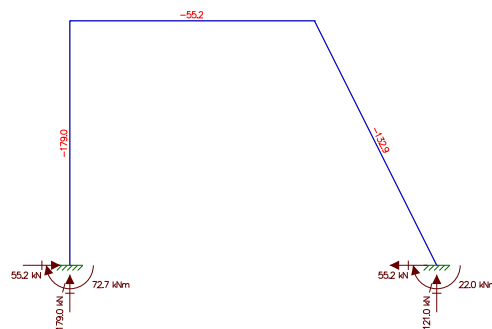
### 6.3 Pórtico plano com um elemento inclinado

Por último, nas figuras 44, 45, 46, 47 e 48 estão representadas as reações de apoio, os diagramas de esforço axial, transversal e momento fletor, e a configuração deformada, respetivamente, referentes a um pórtico plano com um elemento inclinado, segundo os programas de cálculo STAY2D, Ftool e SAP2000.

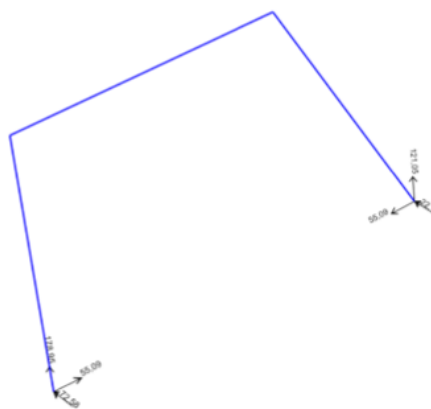
- Reações de apoio:**



a) STAY2D



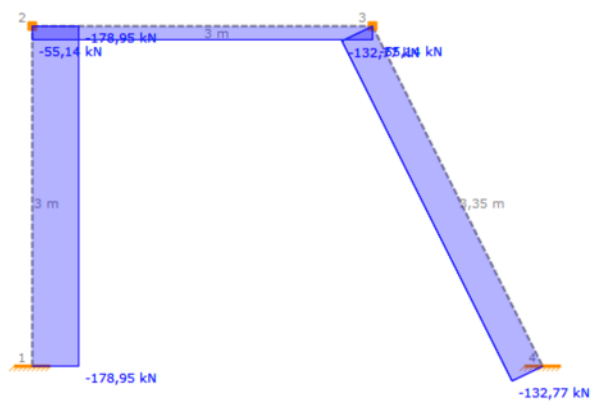
b) Ftool



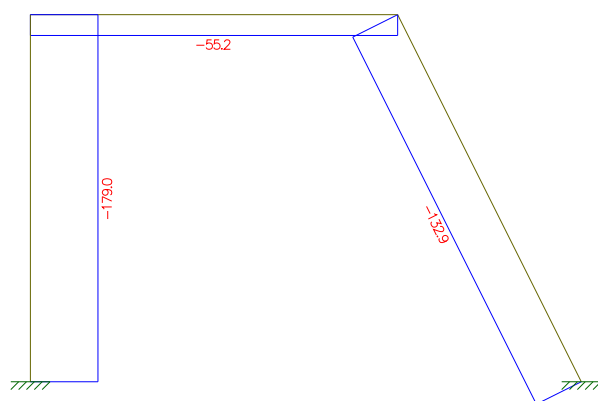
c) SAP2000

Figura 44 - Reações de apoio do pórtico plano com um elemento inclinado.

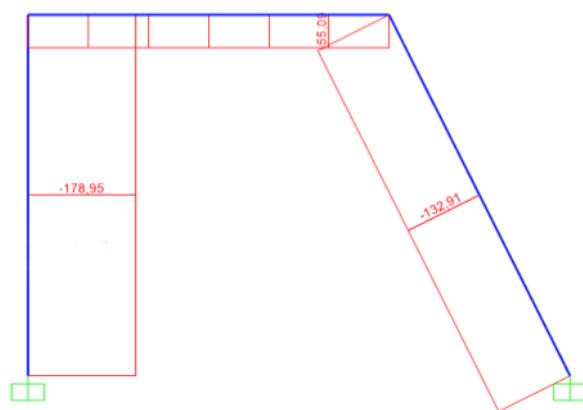
- **Esforço axial:**



a) STAY2D



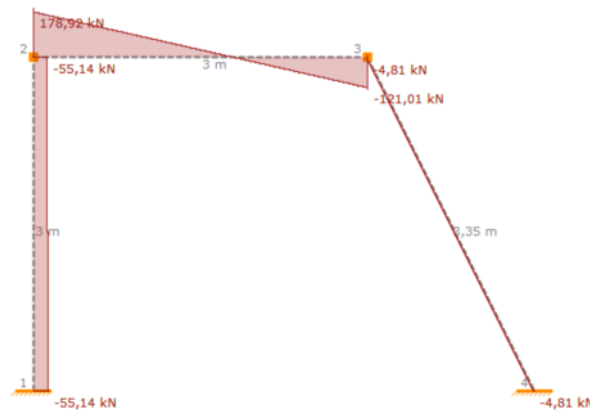
b) Ftool



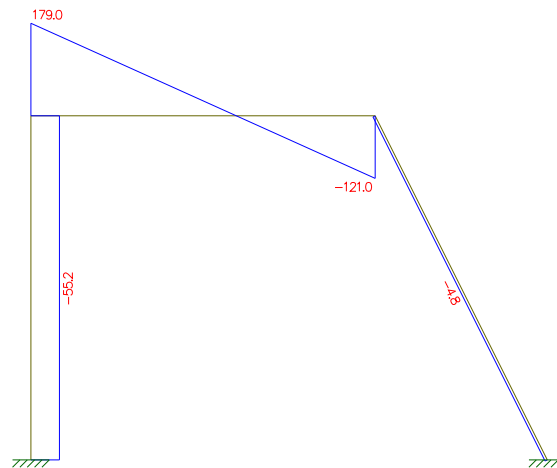
c) SAP2000

Figura 45 - Diagramas de esforço axial do pórtico plano com um elemento inclinado.

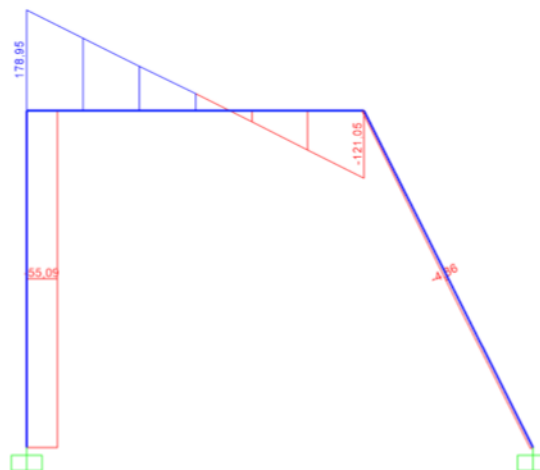
- **Esforço transverso:**



a) STAY2D



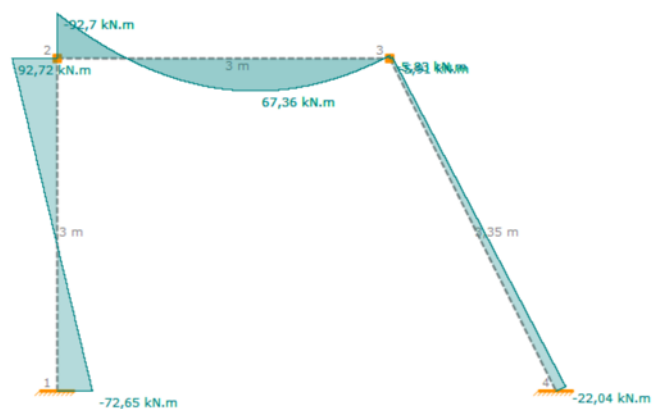
b) Ftool



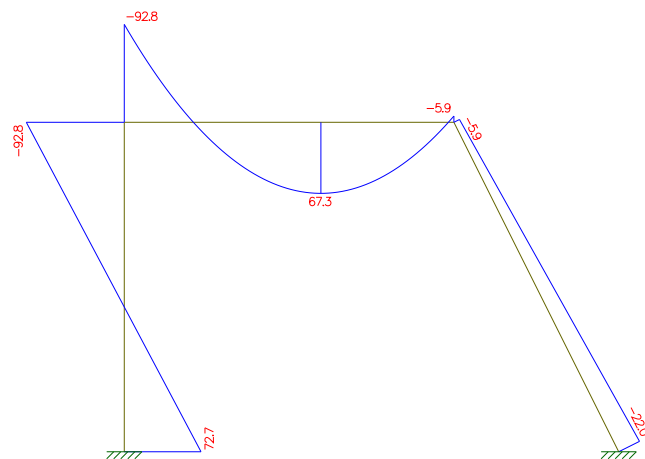
c) SAP2000

Figura 46 - Diagramas de esforço transverso do pórtico plano com um elemento inclinado.

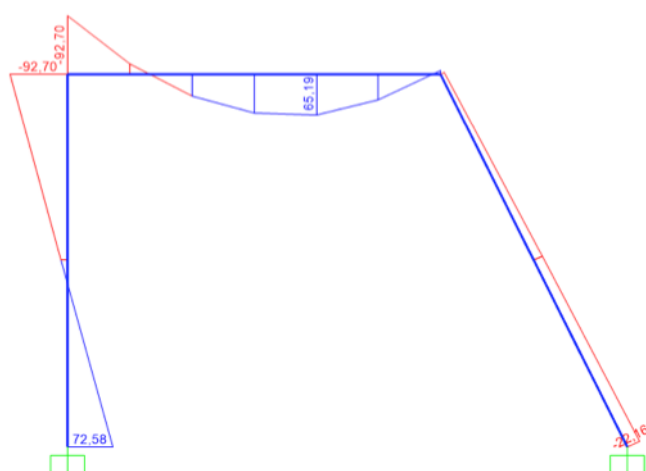
- **Momento fletor:**



a) STAY2D



b) Ftool

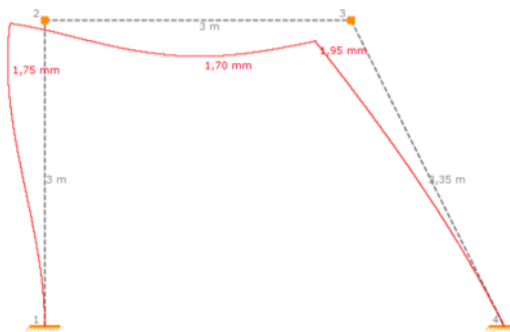


c) SAP2000

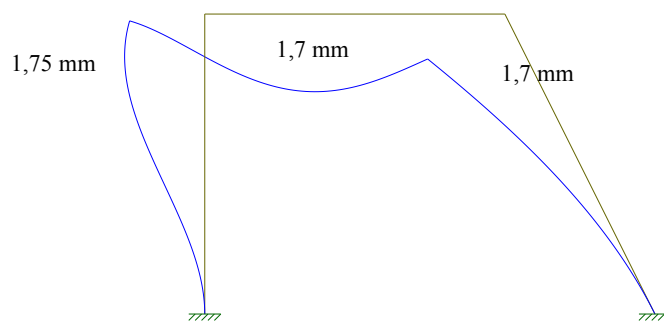
Figura 47 - Diagramas de momento fletor do pórtico plano com um elemento inclinado.



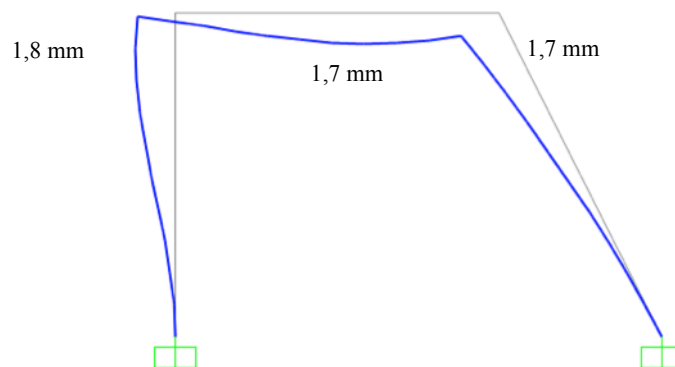
- **Configuração deformada:**



a) STAY2D



b) Ftool



c) SAP2000

Figura 48 - Configurações deformadas do pórtico plano com um elemento inclinado.

## 6.4 Análise de resultados

Como é possível constatar, na análise destes três tipos de estruturas, tanto os valores como os diagramas obtidos nos três programas de cálculo em questão, são semelhantes, exceptuando o fato de algumas abreviações numéricas sem importância significativa. Posto isto, pode-se concluir que o STAY2D garante fiabilidade nas estruturas nele analisadas. Interessa referir que os programas de cálculo utilizados possuem fiabilidade certificada.



## **Capítulo 7**

---

# **CONSIDERAÇÕES FINAIS E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS**



## 7. Considerações finais e desenvolvimentos futuros

### 7.1 Conclusões

Uma vez que existem diversos *software* destinados à análise de estruturas 2D, interessa referir que estes não são *open source* ou inteligíveis o suficiente para proporcionar uma aprendizagem simples e clara. Desta forma, esta dissertação teve como objetivo primordial o desenvolvimento de uma plataforma/ferramenta que permitisse a análise de estruturas bidimensionais, visando o auxílio na aprendizagem do comportamento estrutural, por parte dos estudantes que iniciam o curso de Engenharia Civil.

O *software* desenvolvido tem capacidade para analisar estruturas hiperestáticas, no que diz respeito a estruturas contínuas, fornecendo análise de esforços e configuração deformada da estrutura, bem como valores utilizados no cálculo destes resultados. Os resultados obtidos foram verificados com cálculos manuais, comparados com exercícios e ferramentas com o mesmo objetivo de fiabilidade comprovada.

De modo a facilitar a interação do utilizador com a ferramenta, o desenvolvimento desta obedeceu a certos e determinados critérios com o objetivo de se obter uma solução intuitiva e apelativa. Sendo necessário referir, mais uma vez, que este programa visa o seu uso numa vertente pedagógica.

A escrita e validação do código fonte do programa foi um processo árduo e complexo, pois para além da codificação, estudo da formulação e teorias do método da rigidez direta, acresceu-se ainda a necessidade da aprendizagem da linguagem de programação VB.NET. Não obstante, a realização deste trabalho permitiu constatar que a programação é um processo que, uma vez iniciado, pode enveredar por vários caminhos, alcançar várias e diferentes metas, mas nunca se considera um processo terminado, visto subsistir sempre algo a melhorar ou acrescentar ao trabalho desenvolvido. Posto isto, esta ferramenta poderá servir de base a futuras dissertações, em que exista a necessidade de incorporar determinados módulos num *software* de análise estrutural.

### 7.2 Desenvolvimentos futuros

Apesar de concretizados os objetivos propostos para este trabalho, não se pode considerar que o programa desenvolvido esteja definitivamente completo, uma vez que é necessário acrescentar novas funcionalidades e melhorar as existentes, tais como:

- Capacidade de analisar estruturas articuladas, fornecendo os esforços de compressão e tração e a tensão nos seus elementos constituintes, bem como a sua configuração deformada;
- Capacidade de analisar estruturas mistas (entenda-se por estruturas mistas as que são constituídas por parte contínua e parte articulada) e os seus esforços associados;
- Visualização 3D dos elementos constituintes da estrutura, de forma a que os alunos tenham uma melhor percepção do que realmente representa uma linha desenhada no programa STAY2D.

Interessa referir que o código fonte será disponibilizado, de forma a que os interessados tenham o processo de aprimoramento da ferramenta mais facilitado. Certamente, não faltarão ideias para expandir esta versão do programa e criar novas soluções que possam ser incorporadas neste.

## **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

---





## Referências bibliográficas

**Azevedo, Á. F. M. (1985).** *Análise não linear de estruturas planas de betão armado: Análise não linear de estruturas planas de betão armado pelo método dos elementos finitos*; Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal.

**Azevedo, Á. F. M. (2003).** *Método dos Elementos Finitos*; 1ª edição, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 248 p. Disponível em <http://www.fe.up.pt/álvaro>. Última visualização a 23 de Outubro de 2015.

**Dean, J. (2014).** *Introduction to the Finite Element - Lecture 1: The Direct Stiffness Method and the Global Stiffness Matrix*; Department of Materials Science & Metallurgy, University of Cambridge.

**Eaton, Leonard K. (2001).** *Hardy Cross and the “Moment Distribution Method”*; Nexus Network Journal, vol. 3, no. 3. Disponível em <http://www.emis.de/journals/NNJ/Eaton.html>. Última visualização a 30 de Outubro de 2015.

**Fontes, Fernando F. (2005).** *Análise estrutural de elementos lineares segundo a NBR 6118:2003*; Tese de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, Brasil.

**Halvorson, M. (2010).** *Microsoft Visual Basic 2010: Step by Step*; Washington: Microsoft Press, 544 p., ISBN: 978-0-7356-2669-0.

**Jardine, L. (2004).** *The Curious Life of Robert Hooke: The Man Who Measured London*; New York: Harper Collins Publishers, 422p.

**Kuhlmann, U., et al. (2009).** Robust structures by joint ductility, Final report. Research Fund for Coal and Steel, European Commission.

**Lassala, C. (2015).** *Programação Orientada a Objetos em .NET*; Disponível em <https://msdn.microsoft.com/pt-br/library/cc580626.aspx>. Última visualização a 30 de Outubro de 2015.

**Leet, K. M.; Uang, C. M.; Gilbert, A. M. (2008).** *Fundamentals of Structural Analysis*; Third edition, New York: McGraw-Hill, 790 p., ISBN: 978-0-07-313295-2.

**Lopes, N. (2012).** Apontamentos Estruturas Isostáticas; Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Aveiro, Aveiro.

**M.V.I. (2013).** Museu Virtual de Informática; Disponível em <http://www3.dsi.uminho.pt/museuv/1946hmark1.html>. Última visualização a 23 de Outubro de 2015.

**Martha, L. F. (2010).** *Análise de Estruturas: Conceitos e Métodos Básicos*; Rio de Janeiro: Elsevier, 560 p., ISBN: 978-85-352-3455-8.

**Martin, H. C. (1966).** *Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis*; New York: McGraw-Hill.

**Meyer, C. D. (2000).** *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*; Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 718 p.

**Neves, L. C. (2007).** Apontamentos Mecânica das Estruturas; Departamento de Engenharia Civil, Universidade do Minho, Braga.

**Newsome, B. (2012).** *Beginning Visual Basic 2012*; Indiana: Wiley Publishing Inc., 709 p., ISBN: 978-1-118-31181-3.

**Ramachandra, L. S.; Kumar, S. (2008).** *Structural Analysis: Module 4 – Analysis of Statically Indeterminate Structures by the Direct Stiffness Method*; Version 2 CE, Civil Engineering course material from IIT Kharagpur.

**Reis, A.; Camotim, D. (2001).** *Estabilidade Estrutural*; Lisboa: McGraw-Hill, 470 p., ISBN: 972-773-036-1.

**Romão, X. (2002).** Apontamentos Mecânica I; Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto.

**Timoshenko, S.P.; Goodier, J.N. (1980).** *Teoria da elasticidade*; 3ª Edição, Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 545 p. (citado em Fontes, 2005).

**Varum, H. (2007).** Apontamentos Resistência dos Materiais; Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Aveiro, Aveiro.

**Vicich, B.; Ryan, C.; Meredith, K. (2007).** *Linear vs. Non-Linear Contact Analysis*. Samtec, Inc.

**Vila-Real, Paulo M. (1997).** Apontamentos Teoria das Estruturas; Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Aveiro, Aveiro.

**Vinevala, Q. (2011).** *Programa de cálculo de muros de suporte de terras em betão armado*; Tese de Mestrado, Universidade de Aveiro, Portugal.

**Watson, K.; Nagel, C.; Pedersen, J. H.; Reid, J. D.; Skinner, M. (2010).** *Beginning Visual C# 2010*. Indianapolis: Wiley Publishing Inc., 1007 p., ISBN: 978-0-470-50226-6.

**Weaver, W.; Gere, J. M. (1990).** *Matrix Analysis of Framed Structures*; Third edition, New York: Van Nostrand Reinhold, 546 p.

**Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. (1988).** *The Finite Element Method*; Fourth Edition, McGraw-Hill (citado em Azevedo, 2003).